

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

CAÍQUE RODER CORCIOLI

**ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS
UM SISTEMA COMPUTACIONAL ORIENTADO AO ENSINO E PROJETOS PRÁTICOS**

**BAURU - SP
2017**

CAÍQUE RODER CORCIOLI

ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS
UM SISTEMA COMPUTACIONAL ORIENTADO AO ENSINO E PROJETOS PRÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências, Campus Bauru, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador Professor Doutor Marco Antônio Rahal Sacoman

BAURU - SP
2017

Catálogo na Fonte

Corcioli, Caíque Roder

Análise Matricial de Estruturas - Um Sistema Computacional Orientado ao Ensino e Projetos Práticos - Bauru, 2017.

95 f.

Orientador: Marco Antônio Rahal Sacoman.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bacharelado em Ciência da Computação, Bauru, BR-SP, 2017.

1. Análise matricial de estruturas. 2. Estruturas reticuladas. 3. Método da flexibilidade. 4. Método da rigidez. 5. Matemática Computacional. 6. Ensino. 7. Projetos práticos.

I. Sacoman, Marco Antônio Rahal, orientador.

II. Título.

Catálogo na Publicação

Cutter:

CDU:

Cutter e CDU serão fornecidos pela Biblioteca caso a monografia seja tombada.

CAÍQUE RODER CORCIOLI

ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS
UM SISTEMA COMPUTACIONAL ORIENTADO AO ENSINO E PROJETOS PRÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências, Campus Bauru, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador Professor Doutor Marco Antônio Rahal Sacoman

Banca Examinadora

Professor Doutor Marco Antônio. Rahal Sacoman (Orientador)

Departamento de Computação - FC - UNESP

Professora Doutora Simone das Graças Domingues Prado

Departamento de Computação - FC - UNESP

Professor Doutor Humberto Ferasoli Filho

Departamento de Computação - FC - UNESP

Bauru, 7 de fevereiro de 2017

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à minha família que sempre me apoiou, dando suporte nos momentos difíceis de minha vida e sempre vibrou com meus sucessos e conquistas desde minha existência.

Agradeço ao meu professor e orientador Marco Antônio Rahal Sacoman por todos os ensinamentos, paciência e disposição que me ofereceu para a conclusão deste trabalho, pois sem sua ajuda seria impossível. Agradeço principalmente sua amizade durante todo o tempo de graduação.

Agradeço aos professores que me auxiliaram nas diversas áreas de conhecimento durante minha formação acadêmica.

RESUMO

Ao longo dos anos, o ensino e a aprendizagem de Análise Estrutural foram baseados em técnicas e métodos aproximados, criados devido à falta de tecnologia existente na época para que métodos exatos fossem utilizados, pois estes envolvem cálculos sofisticados ou até mesmo exaustivos, não adequados para solução manual, exceto para pequenos exemplos teóricos. Os conceitos necessários para a formulação de métodos exatos existem há séculos graças à genialidade de engenheiros, físicos e matemáticos que os desenvolveram e, talvez por vislumbrarem que um dia existissem máquinas que pudessem resolver problemas utilizando-os de forma rápida e eficiente. Esta máquina foi criada e passou a ser utilizada de forma significativa a partir da década de 1950, mesmo que considerada rudimentar se comparada aos atuais computadores. O objetivo deste trabalho é fornecer um sistema computacional capaz de realizar toda a análise estrutural, calculando os esforços e deformações de seis tipos de estruturas reticuladas (viga contínua, treliça plana, pórtico plano, grelha, treliça espacial e pórtico espacial) com a finalidade de ser utilizado para o ensino e projetos práticos. Para a análise estrutural, utilizam-se os métodos da flexibilidade e rigidez de forma matricial. Como resultado, os dados foram obtidos de forma precisa com uma interface amigável, ou seja, de utilização intuitiva. Destaca-se o fato do sistema computacional criado ser totalmente gratuito, pois a grande maioria dos produtos existentes no mercado possui um elevado preço, incompatível para a aquisição de um aluno. Desta forma, o sistema computacional serve como uma ferramenta que auxilia no ensino e aprendizagem na área de engenharia estrutural de forma didática e compreensível.

Palavras-chave: Análise matricial de estruturas. Estruturas reticuladas. Método da flexibilidade. Método da rigidez. Matemática Computacional. Ensino. Projetos práticos.

ABSTRACT

Over the years, teaching and learning in Structural Analysis have been based on approximate techniques and methods, created due to the lack of existing technology at the time for exact methods were used, as these involve sophisticated or even exhaustive calculations, not suitable for manual solution, except for small theoretical examples. The concepts necessary for the formulation of exact methods have been in existence for centuries thanks to the genius of engineers, physicists and mathematicians who developed them, and perhaps for a glimpse that there would one day be machines that could solve problems using them quickly and efficiently. This machine was created and started to be used in a significant way from the 1950s, even though it was considered rudimentary if compared to current computers. The objective of this work is to provide a computational system capable of performing all the structural analysis, calculating the stresses and deformations of six types of framed structures (continuous beam, plane truss, plane frame, grid, space truss and space frame) to be used for teaching and practical projects. For structural analysis, the methods of flexibility and stiffness are used in matrix form. As a result, the data was accurately obtained with a user-friendly interface, that is, intuitive use. It should be noted that the computer system created is totally free, since the vast majority of existing products in the market have a high price, incompatible for the acquisition of a student. In this way, the computational system serves as a tool that assists teaching and learning in the area of structural engineering in a didactic and understandable way.

Keywords: Matrix analysis of structures. Framed structures. Flexibility method. Stiffness method. Computational Mathematics. Teaching. Practical projects.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tipos de estruturas reticuladas	27
Figura 2 - Grelha fabricada com pinus na Biblioteca Paulo Freire	30
Figura 3 - Treliças metálicas e painéis de vidro na fachada.....	31
Figura 4 - Pórticos sustentando a estrutura do edifício MASP	31
Figura 5 - Diagrama dos métodos	33
Figura 6 - Ilustração do método da flexibilidade - exemplo 1	35
Figura 7 - Ilustração do método da flexibilidade - exemplo 2	39
Figura 8 - Inversa da matriz de flexibilidade.....	45
Figura 9 - Ilustração do método da rigidez - exemplo 1	49
Figura 10 - Ilustração do método da rigidez - exemplo 2	52
Figura 11 - Rigidez de membro para uma viga	56
Figura 12 - Inversa da matriz de rigidez	62
Figura 13 - Fôrma principal	67
Figura 14 - Seleção do tipo de estrutura	67
Figura 15 - Esquema da viga contínua.....	68
Figura 16 - Entrada de dados 1	69
Figura 17 - Entrada de dados 2.....	70
Figura 18 - Apresentação de resultados 1.....	71
Figura 19 - Apresentação de resultados 2.....	71
Figura 20 - Relatório da viga contínua.....	72
Figura 21 - Relatório ampliado da viga contínua.....	73
Figura 22 - Ajuda.....	73
Figura 23 - Esquema de viga contínua.....	75
Figura 24 - Esquema de treliça plana.....	76
Figura 25 - Esquema de pórtico plano.....	78

LISTA DE SÍMBOLOS

w	Carga uniformemente distribuída
R_B	Reação redundante
Δ_B	Deslocamento da viga
L	Comprimento da viga
EI	Rigidez à flexão da viga
P	Carga concentrada
Q	Matriz de ações redundantes desconhecidas
D_Q	Matriz de deslocamentos na estrutura real correspondentes às redundantes
D_{QL}	Matriz de deslocamentos na estrutura livre correspondentes às redundantes e devido às cargas
F	Matriz de flexibilidade para a estrutura livre
F^{-1}	Inversa da matriz de flexibilidade
θ	Rotação do nó
M_B	Ação correspondente à rotação (momento)
D	Matriz de deslocamentos de nó desconhecidos
A_D	Matriz de ações na estrutura real correspondentes aos deslocamentos desconhecidos
A_{DL}	Matriz de ações na estrutura fixa devido às cargas além dos deslocamentos desconhecidos
S	Matriz de rigidez
S^{-1}	Inversa da matriz de rigidez
A_M	Matriz de ações de extremo na estrutura real
A_{ML}	Matriz de ações de extremo na estrutura fixa devido às cargas exceto deslocamentos
A_{MD}	Matriz de ações de extremo na estrutura fixa devido a valores unitários dos deslocamentos
A_R	Matriz de reações na estrutura real
A_{RL}	Matriz de reações na estrutura fixa devido às cargas exceto deslocamentos desconhecidos

A_{RD}

Matriz de reações na estrutura fixa devido a valores unitários dos deslocamentos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVOS	19
2.1	Objetivo geral	19
2.2	Objetivo específico	19
2.3	Justificativa	19
3	METODOLOGIA	21
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
4.1	Idealização estrutural	24
4.1.1	Graus de liberdade.....	25
4.1.2	Sistemas contínuos.....	25
4.1.3	Sistemas discretos	25
4.2	Tipos de nós	26
4.2.1	Nó livre.....	26
4.2.2	Apoio.....	26
4.3	Estruturas reticuladas	26
4.3.1	Viga contínua	28
4.3.2	Treliça plana.....	28
4.3.3	Pórtico plano	29
4.3.4	Grelha	29
4.3.5	Treliça espacial	30
4.3.6	Pórtico espacial.....	31
4.4	Sistema de coordenadas	32
4.5	Métodos de análise matricial estrutural	32
4.5.1	Método da flexibilidade (Método das forças).....	34
4.5.1.1	Inversa da matriz de flexibilidade.....	44
4.5.1.2	Algoritmo para o método da flexibilidade	46
4.5.2	Método da rigidez (Método dos deslocamentos)	47
4.5.2.1	Inversa da matriz de rigidez	62
4.5.2.2	Algoritmo para o método da rigidez	64
4.5.3	Comparação entre os métodos da flexibilidade e rigidez.....	64
5	SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE ESTRUTURAL	67
5.1	Fôrma principal	67

5.2	Seleção do tipo de estrutura reticulada.....	67
5.3	Mostrar esquema.....	68
5.4	Dados.....	68
5.5	Solução.....	72
5.6	Ajuda.....	73
6	UTILIZAÇÃO DO SISTEMA.....	75
6.1	Viga contínua.....	75
6.2	Treliça plana.....	76
6.3	Pórtico plano.....	77
6.4	Grelha.....	79
6.5	Treliça espacial.....	79
6.6	Pórtico espacial.....	80
7	CONCLUSÃO.....	83
	REFERÊNCIAS.....	85
	BIBLIOGRAFIA.....	87
	SISTEMAS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS.....	88
	APÊNDICE A - Ações de engastamento perfeito produzidas por cargas.....	89
	APÊNDICE B - Propriedades de seções usuais.....	91
	APÊNDICE C - Exemplo de análise de viga contínua.....	93

1 INTRODUÇÃO

A engenharia estrutural é o ramo da engenharia que, considerando o projeto preliminar da estrutura, efetua os cálculos necessários para verificação de valores que garantam o atendimento de suas funções para as quais foram projetadas, sem entrarem em colapso, deformarem ou vibrarem excessivamente. Uma das principais etapas de um projeto estrutural é chamada de Análise Estrutural que consiste no cálculo dos esforços e deformações de uma estrutura, levando em consideração os efeitos provocados pelas cargas às quais é submetida, apresentando os esforços e as deformações de cada um de seus elementos componentes. O objetivo de um engenheiro estrutural é, a partir de todos os cálculos e análises realizados em um projeto estrutural, utilizar da melhor maneira possível os materiais disponíveis com o menor custo para a construção e manutenção de uma determinada estrutura.

No passado, o ensino e a aprendizagem de análise estrutural eram baseados em métodos aproximados que foram desenvolvidos para suprir a falta de tecnologia existente na época para que métodos exatos fossem utilizados, pois estes envolvem cálculos complexos e exaustivos. Os métodos necessários para a formulação de métodos exatos existem há séculos graças à genialidade de engenheiros, físicos e matemáticos que os desenvolveram, porém não existia na época uma máquina que fosse capaz de realizar todos os cálculos de forma rápida e eficiente e, fazê-los manualmente era completamente inviável. Esta máquina foi criada e passou a ser utilizada de forma significativa a partir da década de 1950 e, mesmo considerada rudimentar, se comparada aos atuais computadores, proporcionou novos horizontes para que métodos exatos pudessem ser utilizados (SACOMAN, 1998).

Os métodos aproximados tratam a estrutura como uma coleção de elementos que se interagem de acordo com as leis físicas, ao contrário dos métodos exatos como, por exemplo, o Método da Flexibilidade e o Método da Rigidez na Análise Matricial de Estruturas que, por sua vez, tratam a estrutura de forma global considerando todos os seus elementos de uma só vez de forma mais eficiente. Independentemente do método utilizado para o cálculo, o resultado da análise estrutural deve ser o mesmo.

Apesar de atualmente os computadores, além de acessíveis, já possuírem uma alta capacidade de processamento sendo capazes de realizar todos os cálculos envolvidos nos métodos exatos de forma rápida e eficaz, alguns docentes da área de cálculo estrutural ensinam aos seus alunos os métodos aproximados como receita, mesmo que imprecisos, apenas por tradição ou por dificuldade de utilizarem programas computacionais apropriados. Porém quando se trata de projetos práticos reais, reconhecem que para cálculos estruturais de grande porte o tempo de cálculo para os métodos tradicionais aproximados é exageradamente alto e, neste caso, a Análise Matricial de Estruturas é a solução (SACOMAN, 1998).

Contudo, ao longo dos últimos anos, vários Cursos de Engenharia Civil introduziram disciplina relativa à Análise Matricial de Estruturas em seus currículos, ou como disciplina obrigatória, ou como optativa (ABENGE, 2017).

Nesta monografia são apresentados, nos capítulos subsequentes, os objetivos deste trabalho, os conceitos fundamentais, os métodos e os materiais utilizados para o desenvolvimento do sistema computacional, além de exemplos de livros clássicos utilizados para testes do sistema computacional.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

Desenvolver um sistema computacional utilizando os métodos da Flexibilidade e Rigidez na Análise Matricial de Estruturas para o cálculo dos esforços e deslocamentos de seis diferentes tipos de estruturas reticuladas, permitindo que docentes e alunos que estudam ou pesquisam essa área da engenharia executem problemas práticos e verifiquem as soluções obtidas de forma didática.

2.2 Objetivo específico

Os objetivos específicos foram estudar os métodos implementados computacionalmente, pesquisar diferentes formas de entrada de dados e implementar a considerada mais adequada, implementar a solução do problema, implementar uma apresentação da solução com valores numéricos e gráficos. Portanto, estes objetivos estão relacionados às habilidades oferecidas ao sistema computacional desenvolvido e são, principalmente, as seguintes:

- Implementar o sistema para análise matricial de estruturas.
- Analisar os resultados obtidos.
- Validar o sistema com dados disponíveis na literatura.
- Fornecer uma ferramenta para professores e alunos que estudam e pesquisam essa área do conhecimento ou disciplinas correlatas capaz de solucionar os problemas que envolvam cálculo estrutural de forma rápida, eficiente e precisa, sejam acadêmicos ou profissionais, através da Análise Matricial de Estruturas de uma forma didática e compreensível.

2.3 Justificativa

Como apresentado na Introdução, com o advento da computação, mesmo com computadores extremamente limitados, alguns pioneiros na área de cálculo estrutural se dedicaram à formulação exata de um modelo de cálculo estrutural envolvendo cálculos sofisticados e exaustivos que no passado era impossível, pois não se tinha

tecnologia e recursos necessários para a realização do mesmo.

Há vários programas que se propõe à tarefa de solucionar problemas de Análise Matricial Estrutural, no entanto, são programas que efetuam a análise para cálculo e dimensionamento da estrutura, sem apresentar os dados da análise e, além disto, são raros os que se destinam ao ensino e, mesmo quando isso ocorre, se limitam a resolver problemas sem considerar a dificuldade que o aluno pode ter ao informar as características da estrutura e seus dados de carregamento. Os programas profissionais sem relação alguma com o aprendizado são vários, em geral para cálculo e dimensionamento da estrutura, todos licenciados e com preços altamente elevados.

Em relação aos tipos de estruturas, qualquer uma pode ser modelada e calculada utilizando Análise Matricial Estrutural, porém no caso de estruturas no meio contínuo, há que se discretizar seus elementos, e neste caso, já existe aproximação. Como o objetivo é tratar os problemas estruturais de forma exata, este trabalho contempla a modelagem e cálculo de estruturas reticuladas como: viga contínua, treliça plana, pórtico plano, grelha, treliça espacial e pórtico espacial.

Desta forma, por não encontrar programas para Análise Matricial Estrutural gratuitos e destinados ao ensino de forma didática, este trabalho busca desenvolver um sistema computacional para estruturas reticuladas que atenda esses requisitos.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada envolve estudo dos métodos de análise matricial de estruturas, desenvolvimentos de algoritmos para solução destes problemas, desenvolvimento do sistema computacional, testes do sistema computacional através de exemplos disponíveis em livros de análise matricial de estruturas e itens complementares para utilização deste sistema, como arquivos de ajuda e tutorial que são utilizáveis a partir do próprio sistema.

Para isto foram utilizadas referências bibliográficas que vão desde o clássico Gere e Weaver (1987) até documentos mais recentes, como Soriano (2010), passando por McGuire, Gallagher e Ziemian (2000), que escreveram conceituados livros sobre estruturas e sobre otimização de estruturas.

O sistema computacional foi desenvolvido utilizando o ambiente de desenvolvimento integrado Delphi, acrescentando-se ao mesmo, componentes específicos para manipulação de arquivos de ajuda, tutoriais e relatórios que podem ser vistos através do programa ou serem impressos.

O ambiente de desenvolvimento integrado Delphi foi adotado por:

- permitir fácil entendimento do código fonte, facilitando alterações que poderão ocorrer em trabalhos futuros;
- gerar código executável completo, não sendo necessário instalar bibliotecas para execução, como acontece com programas que necessitam dot Net Framework, Windows Forms, Visual C Runtime Library, java Runtime Environment, ou outros;
- ser um ambiente de desenvolvimento completo, não necessitando de *framework* auxiliar para geração de programas visuais e geração de gráficos;
- permite gerar programas para Windows 32, Windows 64, Android ARM, Android Intel, IOS e OSX, permitindo novas versões do presente trabalho, cuja compilação é exclusiva para Windows.

Os arquivos de ajuda e tutoriais foram desenvolvidos com linguagem HTML e compilados com HTML Help Workshop para geração de arquivos do tipo chm (Microsoft, 2012).

Os relatórios foram desenvolvidos com a utilização do componente QuickReport (QBS Software Limited, 2008).

O sistema foi desenvolvido utilizando o sistema operacional Windows 7 e executa em diversas versões como: Windows 98, Windows XP, Windows Vista, Windows 7, Windows 8 e Windows 10 (Wikipedia, 2016).

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

De acordo com Aragão Filho (2010), o processo de um projeto estrutural envolve a determinação de forças internas, de ligações e deslocamentos de uma estrutura. Esta fase do processo é chamada de Análise Estrutural. Seu principal objetivo é, dadas as características geométricas e mecânicas de uma estrutura, as características físicas dos materiais que as compõem e as ações que sobre ela atuam, determinar os deslocamentos de todos os seus pontos e os esforços internos (tensões ou esforços internos solicitantes) e reações de apoio (no caso de estruturas ligadas ao terreno).

A fase de análise é normalmente a maior parte do processo e engloba muitos e diferentes aspectos: constrói-se um modelo matemático idealizado (em geral, geometricamente perfeito), impõem-se carregamentos e outros efeitos ambientais, e depois se prevê o desempenho resultante através da análise de todos os estágios de carga. Para algumas estruturas a análise matemática-numérica é suplementada ou complementada por uma análise física com modelos reduzidos do protótipo da estrutura, ou mesmo do próprio protótipo em casos de produção em série industrial como, por exemplo, aeronaves e automóveis. Em qualquer caso, a análise estrutural tem como alvo propiciar o necessário entendimento e apreciação do comportamento da estrutura e comparar o desempenho esperado com os requerimentos de projeto e prescrições de normas.

Uma estrutura é criada para servir a um propósito definido. Os requerimentos podem ser para: abrigar um espaço (coberturas), suportar veículos (pontes) e máquinas, ou conter ou reter materiais (silos, barragens). Uma estrutura pode ser projetada com o propósito de trafegar no espaço, estar sobre o terreno ou enterrada, flutuar ou ser submergida. Para que ela cumpra o seu propósito, distintos objetivos de projetos devem ser especificados e satisfeitos, como por exemplo: segurança, durabilidade, desempenho em serviço, conforto dos usuários e exequibilidade prática. Além desses, a estética ou aparência da estrutura deve ser seriamente considerada.

De maneira a cumprir com esses e outros objetivos de projeto, deve-se ter um entendimento aprofundado do comportamento dos materiais, dos componentes estru-

turais e do sistema estrutural como um todo. Dentre os mais importantes objetivos de um projeto ressalta-se a segurança estrutural. Rupturas localizadas, distorções excessivas, fadiga do material, flambagem e formação de mecanismos plásticos em um sistema estrutural são inaceitáveis sob quaisquer circunstâncias, já que tais modos de colapso podem resultar em pesadas perdas materiais e, acima de tudo, de vidas humanas. Além da segurança contra o colapso, uma estrutura deve satisfazer os critérios de utilização, isto é, todos os aspectos de desempenho devem ser aceitáveis para o uso pretendido.

As deformações (deslocamentos) e fissuração devem ser limitadas ao ponto de não serem notadas e não comprometerem a utilização. Vibrações e ruídos acústicos devem ser controlados. Reservatórios de líquidos e gases não podem vaziar e fundações não devem recalcar excessivamente. A chave para a plena satisfação dos critérios e requisitos de utilização é o completo entendimento do comportamento da estrutura para todos os casos de carregamento e condições de serviço e ambientais, ou seja, uma ampla análise estrutural.

4.1 Idealização estrutural

A maioria das estruturas consiste de uma montagem de diferentes elementos estruturais conectados entre si por ligações contínuas ou discretas. O passo mais importante na análise matricial de estruturas é a formulação de um modelo matemático de elementos discretos equivalentes à estrutura contínua real. Este modelo é necessário a fim de se obter um sistema com um número finito de variáveis (graus de liberdade) nos quais as operações de álgebra matricial poderão ser realizadas. A formulação de tal modelo chama-se de idealização estrutural. Desta forma Gere e Weaver (1987, p.13) definem "Nós de uma estrutura reticulada são pontos de interseção dos membros, assim como os pontos de apoio e extremidades livres dos membros".

Com base nisso, Venâncio Filho (1975, p.1) define idealização estrutural como:

[...] a transformação de um corpo elástico contínuo em um sistema estrutural formado por uma reunião de elementos estruturais unidos entre si, através de um número finito de pontos. Estes são os nós do sistema estrutural que procura ser o modelo do corpo elástico considerado. Um elemento es-

trutural é definido como uma parte do corpo elástico da qual é possível conhecer o comportamento a partir do conhecimento dos deslocamentos ou forças nodais do elemento. O comportamento do elemento estrutural é representado pelos deslocamentos, deformações unitárias e tensões presentes em qualquer ponto do elemento.

A união dos elementos estruturais para formar o sistema estrutural é efetuada de maneira que sejam satisfeitas as condições de equilíbrio de forças nodais e de compatibilidade de deslocamentos nodais do sistema. Nos sistemas estruturais unidimensionais, os elementos estruturais são unidos entre si apenas através dos nós. Portanto a idealização estrutural corresponde à situação real do sistema. No caso de sistema bi e tridimensionais, para que o sistema estrutural idealizado bem represente o corpo contínuo do qual procura ser o modelo, a união dos elementos estruturais através dos nós deve acarretar subsidiariamente a união através de lados e faces comuns a dois elementos estruturais adjacentes.

O processo de idealização estrutural é a primeira etapa a ser considerada na análise matricial de um sistema estrutural. Ela deve ser tal que o comportamento do modelo formado pela reunião dos elementos estruturais represente com precisão o comportamento do corpo elástico real.

4.1.1 Graus de liberdade

Graus de liberdade são as variáveis envolvidas no processo de análise estrutural. Quando se trata do método dos deslocamentos, por exemplo, os graus de liberdade são as deformações (deslocamentos ou rotações) dos nós da estrutura.

4.1.2 Sistemas contínuos

Sistemas contínuos são aqueles compostos por uma infinidade de pontos materiais e que possuem, portanto, um número infinito de graus de liberdade.

4.1.3 Sistemas discretos

Sistemas discretos são aqueles que possuem um número finito de pontos materiais e, portanto, um número finito de graus de liberdade.

4.2 Tipos de nós

Conforme definido na Seção 4.1, as estruturas são divididas em elementos de dimensão finita, ligados entre si por pontos nodais (nós) onde se supõem a concentração de todas as forças de ligação entre elementos. As ações e deslocamentos são discretizados nos nós e a composição destes elementos para constituir a estrutura resulta em um sistema de equações algébricas que é tratado matricialmente.

4.2.1 Nó livre

Nó em extremo da barra sem vinculação. Podem-se inserir nós livres em qualquer ponto da estrutura com o objetivo de destacar alguma ocorrência no ponto. Neste caso, o nó livre é conhecido, também, como nó fictício.

4.2.2 Apoio

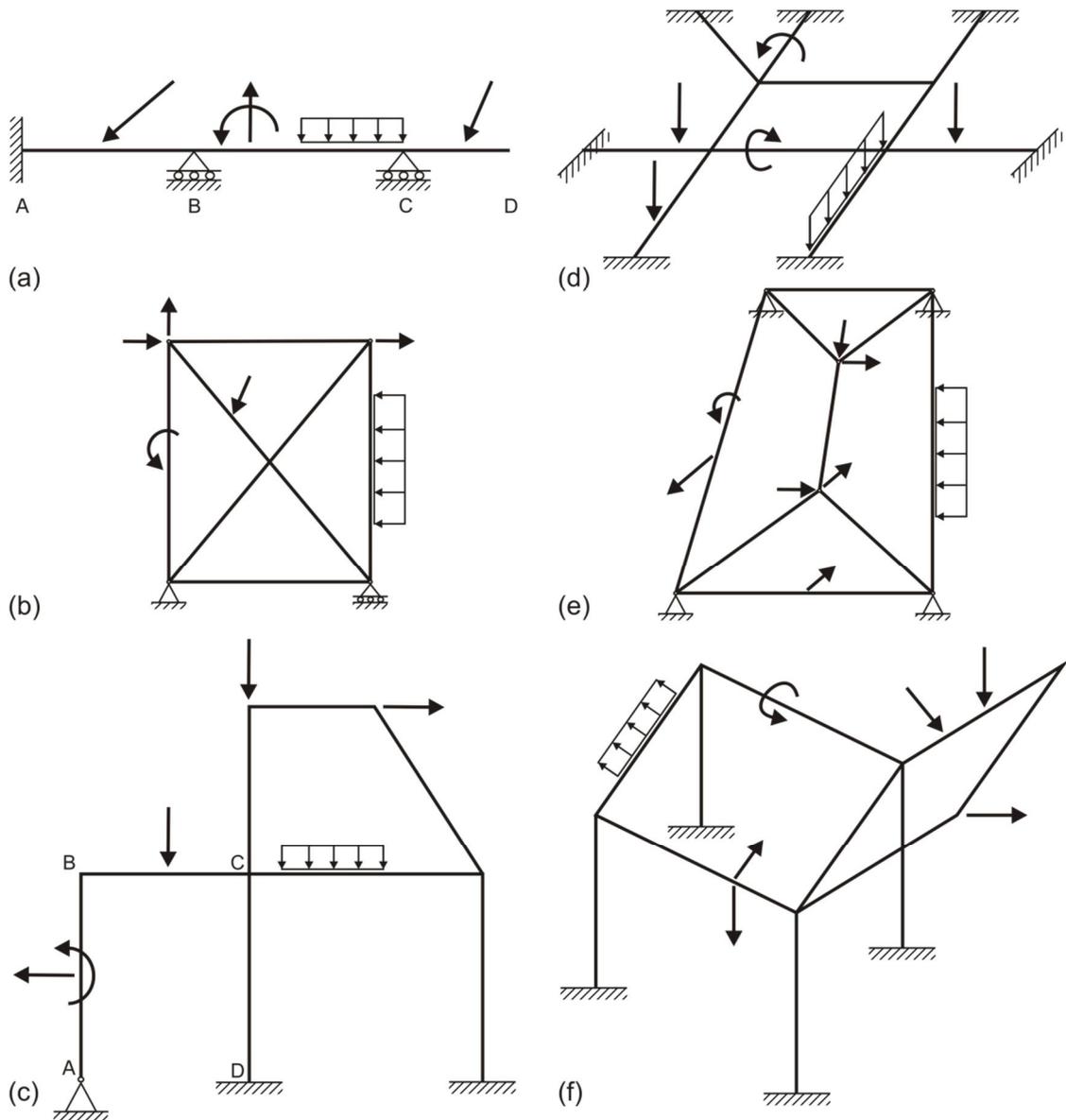
Apoios são componentes ou partes de uma estrutura que impedem o movimento em uma ou mais direções. Podem-se estabelecer três possibilidades de movimentos: translação horizontal, translação vertical e rotação.

Os apoios são classificados, basicamente, em três tipos: Apoio móvel ou apoio simples que impede o movimento de translação vertical permitindo a rotação do sólido em torno do ponto e o movimento do ponto somente na direção da reta; Apoio fixo ou apoio duplo que impede os movimentos de translação horizontal e vertical permitindo apenas a rotação; e Engaste ou apoio triplo que impede o deslocamento do ponto em qualquer direção e rotação.

4.3 Estruturas reticuladas

Estruturas reticuladas são sistemas constituídos por elementos lineares ligados entre si por pontos nodais, ou nós da estrutura e ligados ao exterior através de apoios.

Figura 1: Tipos de estruturas reticuladas.



Fonte: Sacoman (2012).

Elemento linear é aquele em que o comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal, sendo também denominado barra (NBR 6118, 14.4.1.1) (ASSOCIAÇÃO ..., 2003).

A decomposição de uma estrutura em partes, que possam ser associadas a uma teoria de cálculo já consolidada no meio técnico, dá origem aos elementos estruturais. Os sistemas estruturais idealizados por meio de elementos unidimensionais podem ser divididos em seis categorias com características específicas (MARTIN, 1966, p.3) apresentados na Figura 1 sendo (a) viga contínua, (b) treliça plana, (c) pórtico plano, (d) grelha, (e) treliça espacial e (f) pórtico espacial.

4.3.1 Viga contínua

Vigas são elementos lineares, ou barras, em que a flexão é preponderante. Geralmente são utilizadas no sistema laje-viga-pilar para transferir os esforços verticais recebidos da laje para o pilar ou para transferir uma carga concentrada, caso sirva como um apoio para o pilar. Pode ser composta de materiais como: madeira, ferro, concreto armado.

De acordo com Gere e Weaver (1987, p.14), supõe-se que as forças aplicadas a uma viga, atuam em um plano que contém um eixo de simetria de sua seção transversal. Além disso, todos os binários externos que atuam sobre ela têm seus vetores de momento normais a este plano, deformando-a no mesmo (plano de flexão) e não sofrendo torção. Em qualquer seção da viga podem existir esforços internos e, em caso geral, podem incluir uma força axial, uma força cortante e um binário de flexão.

4.3.2 Treliça plana

Denomina-se treliça plana, o conjunto de elementos de construção como barras de seção circular, retangulares, cantoneiras, perfil I, U e outros, interligados entre si, sob forma geométrica triangular, retangular ou trapezoidal, através de pinos, soldas, rebites, parafusos, que visam formar uma estrutura rígida, com a finalidade de resistir a esforços normais apenas.

A denominação treliça plana deve-se ao fato de todos os elementos do conjunto pertencerem a um único plano. A sua utilização na prática pode ser observada em pontes, viadutos, coberturas, guindastes e torres, entre outros.

Todas as forças aplicadas se consideram atuando no plano da estrutura e todos os binários externos têm seus vetores de momentos normais a esse plano, da mesma forma que ocorre na viga contínua. As cargas consistem em forças concentradas aplicadas nos nós assim como forças que atuam nos próprios membros.

Para análise, as cargas atuantes nos membros podem ser substituídas por cargas estaticamente equivalentes que atuam nas articulações. Logo a análise de uma treli-

ça plana sujeita somente a cargas dos nós fornece como resultado forças axiais de tensão e de compressão nos membros. Além de forças axiais, existem momentos fletores e forças cortantes naqueles membros que têm cargas que atuam diretamente sobre eles. A determinação de tais esforços resultantes constitui na análise completa das forças que atuam sobre os membros de uma treliça. (GERE; WEAVER, 1987, p.14).

4.3.3 Pórtico plano

De acordo com Soriano (2005), pórticos planos são definidos como modelos de estruturas em barras retas ou curvas, situadas em um mesmo plano (usualmente vertical), sob ações externas que as solicitam apenas nesse plano, de maneira que em cada seção transversal de barra desenvolvam somente momentos fletores, esforços cortantes e normais de vetores representativos nesse plano.

Esse tipo de estrutura é largamente aplicado a diversas situações da engenharia civil, tendo como principais exemplos a sua utilização na composição estrutural de prédios, pontes, viadutos entre outras aplicações. Pode ser constituído de materiais como: concreto armado, aço estrutural, alumínio estrutural, madeira, entre outros. Apresentam-se como estruturas essenciais a quase todo tipo de edificação, bastante observados no dia-a-dia, sendo um dos motivos para sua utilização na elaboração de projetos estruturais, sua versatilidade.

4.3.4 Grelha

Grelhas são constituídas por um sistema de vigas situadas em um mesmo plano, perpendiculares ou não entre si, que se interceptam formando uma malha que recebe solicitações não coplanares. As vigas trabalham em conjunto para resistir às forças atuantes que são predominantemente perpendiculares a seu plano.

As grelhas podem ser feitas em aço, concreto armado, concreto protendido, madeira, como na Figura 2, entre outros. Sobre as vigas pode ser criada uma laje de concreto armado maciça, porém lajes pré-moldadas em concreto armado e protendido também são adequadas. Os sistemas de vigas pré-moldadas constituem em ótima solução quando há necessidade de rapidez de execução.

Figura 2: Grelha fabricada com pinus na Biblioteca Paulo Freire.



Fonte: Nakamura (2014).

Segundo Gere e Weaver (1987, p.15), todas as forças são normais ao plano da estrutura e todos os binários têm seus vetores no plano da grelha. Esta orientação de carga pode dar como resultado torção assim como flexão em alguns dos membros. Considera-se que cada membro tem os eixos de simetria em sua seção transversal de modo que a torção e flexão se tornam independente uma da outra.

4.3.5 Treliça espacial

Uma treliça espacial é similar a uma treliça plana, exceto que os membros podem ter qualquer direção no espaço, como ilustra a Figura 3.

As forças que atuam em uma treliça espacial podem ter direções arbitrárias, porém qualquer binário que atua em um membro deve ter seu vetor de momento perpendicular ao eixo dessa barra. A razão dessa exigência é que um membro de treliça espacial é incapaz de suportar momento de torção. (GERE; WEAVER, 1987, p.14).

Figura 3: Treliças metálicas e painéis de vidro na fachada.



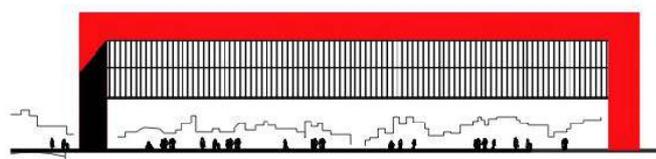
Fonte: Porto (2016).

4.3.6 Pórtico espacial

Os pórticos espaciais são formados por elementos lineares com ligações rígidas, semirrígidas ou flexíveis. (PFEIL, W; PFEIL, M, 2009). Uma melhor modelagem é alcançada com a inserção de trechos rígidos nas ligações entre as barras.

O modelo tridimensional é o mais completo para a análise estrutural, visto que é capaz de determinar momentos fletores e de torção, esforços cortantes e normais de todos os elementos. A Figura 4 ilustra pórticos espaciais sustentando a estrutura do edifício MASP.

Figura 4: Pórticos sustentando a estrutura do edifício MASP.



Vista frontal MASP

Fonte: Museu de Arte de São Paulo (2016).

Seu uso é adequado para a análise de carregamentos verticais ou horizontais, apresentando ou não simetria. A análise considera rotações devidas à torção, que podem interferir nos esforços finais. Além disso, é possível a aplicação de forças em qualquer direção no espaço tridimensional. (SORIANO, 2010, p.214).

4.4 Sistema de coordenadas

Com a finalidade de identificar e ordenar matricialmente as ações mecânicas (forças e momentos) e os deslocamentos (lineares ou angulares), existentes nos nós de uma estrutura integrada (montada, contínua) ou nas extremidades de um elemento (isolado, quando subdividida a estrutura - "estrutura discretizada"), torna-se imprescindível a determinação de um sistema de coordenadas arbitrário.

São necessários dois sistemas de coordenadas chamados de sistema de coordenadas globais e sistema de coordenadas locais. O sistema de coordenadas globais refere-se aos graus de liberdade da estrutura como um todo, ou seja, estrutura montada, já o sistema de coordenadas locais refere-se aos graus de liberdade dos elementos discretizados, ou seja, das partes da estrutura.

4.5 Métodos de análise matricial estrutural

Os métodos de análise estrutural, como ilustra a Figura 5, podem ser divididos em dois grupos: métodos analíticos e métodos numéricos. As limitações impostas pelos métodos analíticos são bem conhecidas. Somente em casos especiais soluções fechadas são obtidas. Soluções aproximadas podem ser achadas para algumas configurações estruturais simples, mas, em geral, para estruturas complexas os métodos analíticos não podem ser usados, e os métodos numéricos devem ser invariavelmente empregados.

Os métodos numéricos de análise estrutural podem ser subdivididos em dois tipos: soluções numéricas de equações diferenciais para deslocamentos ou tensões, e métodos matriciais baseados na idealização discreta em elementos estruturais.

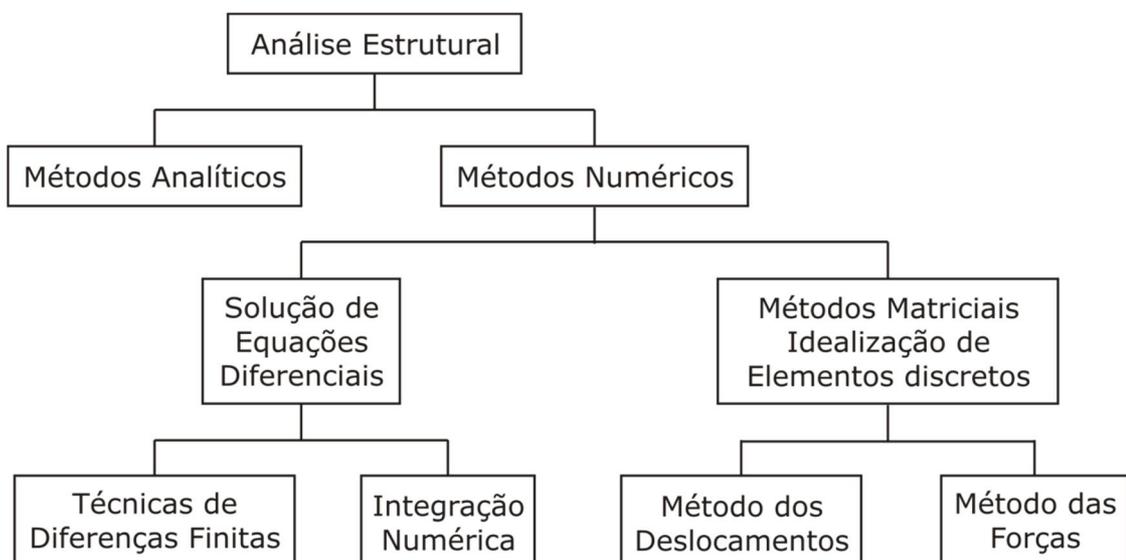
Nos métodos matriciais, toda teoria é desenvolvida na álgebra matricial, através de

todos os estágios da análise. A estrutura é inicialmente idealizada com uma montagem de elementos estruturais discretos com formas presumidas da distribuição de deslocamentos e tensões, e a solução completa é então obtida pela combinação dessa distribuição individual aproximada de deslocamento e tensões de maneira que se satisfaça o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos nas junções desses elementos. Métodos baseados nesta abordagem mostram-se ser mais adequados à análise de estruturas complexas.

Os métodos da Flexibilidade e da Rigidez, também chamados de método das forças e dos deslocamentos, respectivamente, são exemplos de métodos matriciais utilizados na Análise Estrutural. Esses métodos podem ser aplicados geralmente em todos os tipos de estruturas, inclusive estruturas reticuladas descritas na Seção 4.3, utilizadas nesse trabalho. Ambos os métodos são fundamentais para o conceito e envolvem formulações matemáticas semelhantes que se faz mediante a álgebra matricial.

A utilização de uma notação matricial permite uma generalização imediata de estruturas complicadas além de tornar o problema em uma forma ideal para a programação computacional. Portanto, os métodos da Flexibilidade e Rigidez são uma ferramenta de grande importância para a análise estrutural de forma sistematizada e são descritos nas Seções 4.5.1 e 4.5.2.

Figura 5: Diagrama dos métodos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.5.1 Método da flexibilidade (Método das forças)

O método da Flexibilidade pode ser usado para calcular qualquer estrutura estaticamente indeterminada. Para ilustrar as ideias fundamentais do método, considera-se o exemplo mostrado na Figura 6a. A viga ABC da figura tem dois lados de comprimentos iguais e está submetida a uma carga uniformemente distribuída de valor w . A viga é estaticamente indeterminada de primeiro grau, na qual quatro reações são possíveis (2 reações em A , 1 em B e 1 em C) e três equações de equilíbrio estático para ações em um plano. A reação R_B no apoio central se torna uma redundante estática e se retirada, obtém-se uma estrutura livre ilustrada na Figura 6b.

Sob a ação da carga uniforme w , a estrutura livre se deforma como se mostra na Figura 6c. O deslocamento da viga no ponto B denominado por Δ_B é dado pela expressão:

$$\Delta_B = \frac{5wL^4}{384EI}$$

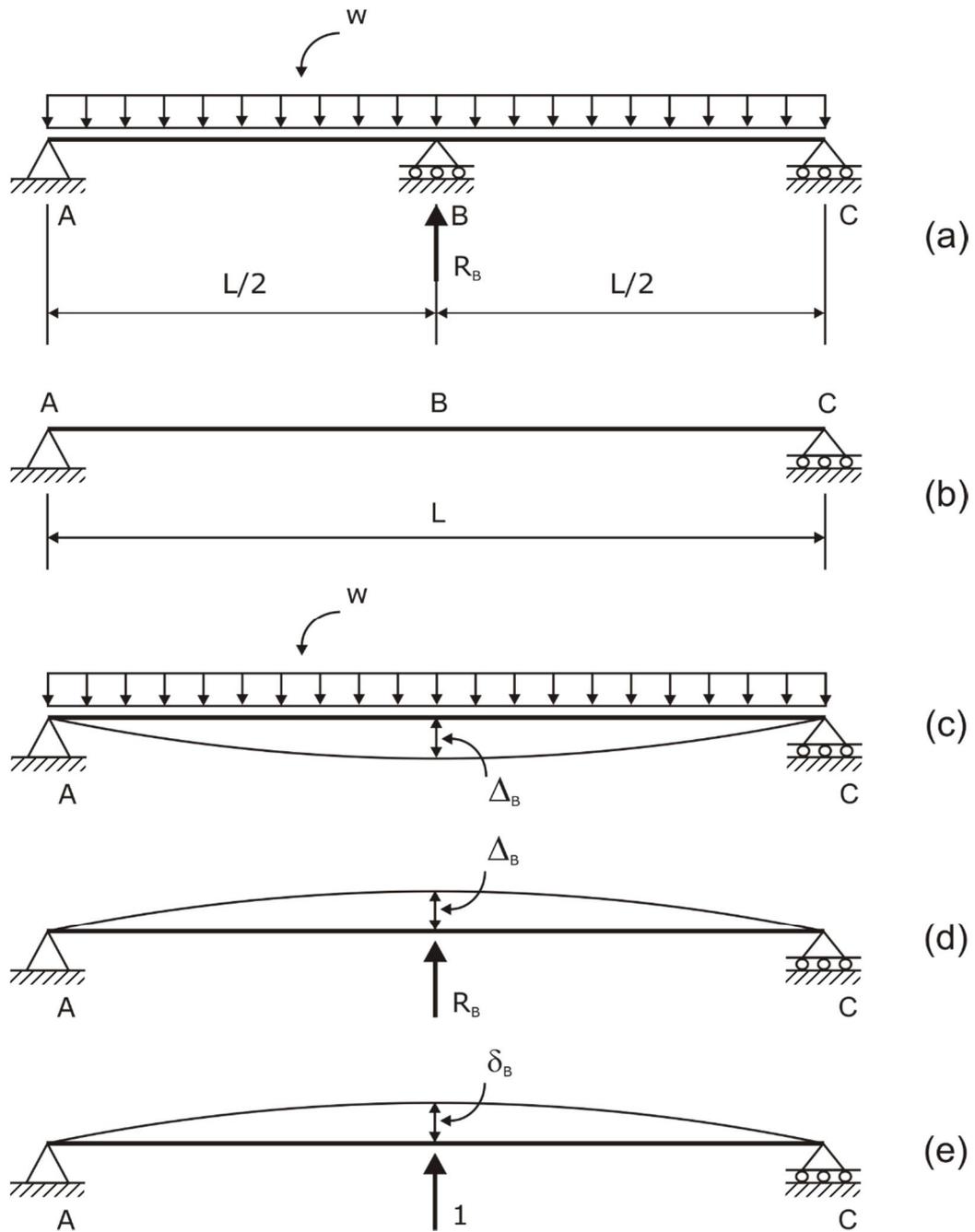
onde EI é a rigidez à flexão da viga. Porém, supõe-se que a viga real não tem translação no ponto B e, portanto, a reação redundante R_B deve ser tal que produza na estrutura livre um deslocamento para cima igual a Δ_B como ilustra a Figura 6d. De acordo com o princípio da superposição, o deslocamento final no ponto B na estrutura livre é o resultado dos deslocamentos causados pela carga w e pela reação redundante R_B . O deslocamento para cima devido a R_B é:

$$\Delta_B = \frac{R_B L^3}{48EI}$$

Igualando essas duas expressões obtidas anteriormente, para Δ_B tem-se:

$$\frac{5wL^4}{384EI} = \frac{R_B L^3}{48EI} \quad (1)$$

Figura 6: Ilustração do método da flexibilidade - exemplo 1.



Fonte: Sacoman (2012).

A reação incógnita R_B pode ser obtida resolvendo a Equação 1:

$$R_B = \frac{5}{8} wL$$

Uma vez encontrada R_B , pode-se encontrar as reações restantes da viga de dois

membros através das equações de equilíbrio estático.

No exemplo anterior, o procedimento foi calcular os deslocamentos na estrutura livre causados pelas cargas e pela ação redundante e, após isso, formular uma equação relacionada com esses deslocamentos. A Equação 1 mostra que o deslocamento vertical devido à carga é igual ao deslocamento para cima devido à reação redundante. Em geral, uma equação desse tipo pode ser chamada de *equação de compatibilidade, equação de superposição ou equação de geometria*.

Uma aproximação que pode utilizar-se na resolução de uma viga de dois membros da Figura 6a consiste em encontrar o deslocamento produzido por um valor unitário de R_B e logo multiplicá-lo por R_B para encontrar o deslocamento causado por R_B . É mais comum e sistemático utilizar uma convenção de sinais para as ações e deslocamentos em B como, por exemplo, supor que os deslocamentos e reações são positivos quando têm direção para cima. Logo a aplicação de uma força unitária (correspondente a R_B) na estrutura livre, como se mostra na Figura 6e, fornece como resultado um deslocamento positivo δ_B . Esse deslocamento é dado pela expressão:

$$\delta_B = \frac{L^3}{48EI} \quad (2)$$

O deslocamento causado por R_B atuando somente sobre a estrutura livre é $\delta_B R_B$. O deslocamento causado por uma carga uniforme w atuando somente sobre a estrutura livre é:

$$\Delta_B = -\frac{5wL^4}{384EI} \quad (3)$$

Este deslocamento é negativo devido ao Δ_B ser positivo quando tem direção para cima. A superposição dos deslocamentos devido à carga w e à reação R_B deve produzir um deslocamento igual a zero da viga no ponto B e, portanto, a equação de compatibilidade é:

$$\Delta_B + \delta_B R_B = 0 \quad (4)$$

onde:

$$R_B = \frac{\Delta_B}{\delta_B} \quad (5)$$

Quando as expressões dadas anteriormente para Δ_B e δ_B (Equações 2 e 3) são substituídas na Equação 5, o resultado é:

$$R_B = \frac{5}{8} wL$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente. O sinal positivo no resultado denota que R_B tem direção para cima.

Uma parte importante da solução precedente consiste na escrita da equação de superposição (Equação 4) que expressa o feito geométrico de que a viga não sofre deflexão no apoio B . Incluídos nesta equação estão os efeitos da carga e da reação redundante. O deslocamento causado pela reação tem sido expressado como o produto da reação por um deslocamento causado por um valor unitário da reação ($\delta_B R_B$), sendo o segundo, o coeficiente de influência de flexibilidade. Se todos os termos da equação são expressos com a mesma convenção de sinais, então, o sinal do resultado final denotará a direção correta da reação redundante.

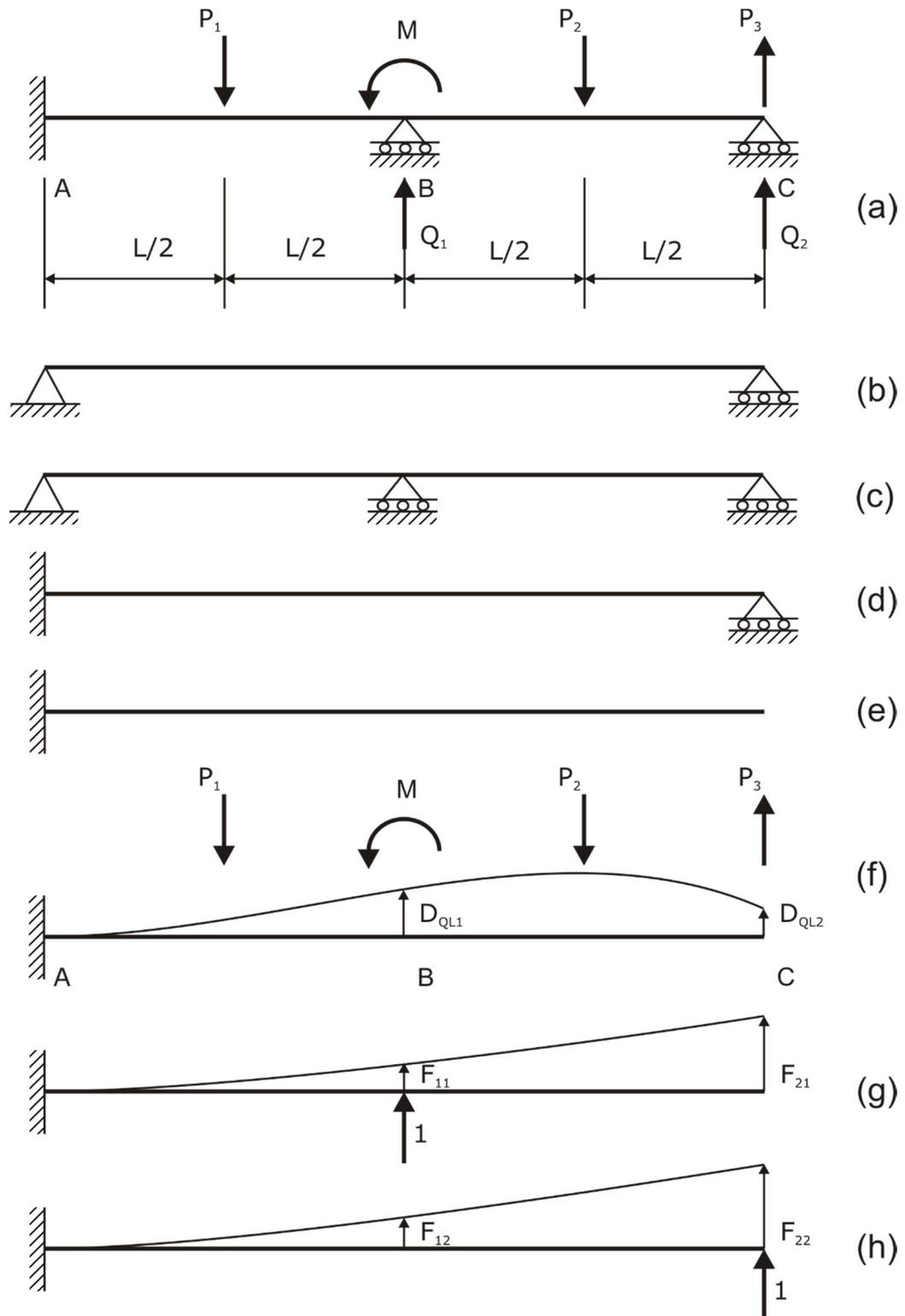
Se uma estrutura é estaticamente indeterminada de um grau maior que o primeiro, a aproximação utilizada no exemplo anterior deve ser modificada, introduzindo uma notação mais generalizada. Para ilustrar essas características, considera-se outro exemplo de viga prismática (Figura 7a). A viga ilustrada na figura é estaticamente indeterminada de segundo grau e, portanto, uma estrutura livre estaticamente determinada pode ser obtida liberando a viga de ações redundantes. Podem-se escolher diferentes ações para as redundantes e a estrutura livre correspondente. Nas Figuras. 7b, 7c, 7d e 7e se mostram quatro dessas possibilidades. Na primeira (Figura

ra 7b), o momento reativo em A e a força em B se tornam as redundantes, portanto, a restrição rotacional em A e em B se eliminam da viga original para obter-se a estrutura livre. No caso seguinte (Figura 7c), o momento reativo em A e o momento fletor em B são libertados e, portanto, a estrutura livre não tem restrição rotacional em A nem restrição contra o momento fletor em B . A última condição representa-se pela presença de uma articulação no ponto B da viga. A estrutura livre ilustrada na Figura 7d se obtém soltando a reação e o momento fletor no ponto B . Por fim, a estrutura livre mostrada na Figura 7e se obtém selecionando as reações nos nós B e C como redundantes. Esta estrutura livre particular é escolhida para a análise que se segue. Todas as estruturas livres mostradas na Figura 7 são estaticamente indeterminadas e imóveis, pois em geral, somente estruturas desse tipo são utilizadas no método da flexibilidade.

As ações redundantes que são selecionadas para análise são denominadas Q_1 e Q_2 na Figura 7a. Essas ações são as forças de reação nos nós B e C . Na Figura 7f, ilustra-se uma estrutura livre sujeita a várias cargas que atuam sobre a viga original que neste exemplo, supõem-se três cargas concentradas P_1 , P_2 e P_3 , além de um binário m . Essas cargas geram deslocamentos na estrutura livre e, em particular, os deslocamentos que correspondem a Q_1 e Q_2 se produzem nos nós B e C . Estes deslocamentos se denominam D_{QL1} e D_{QL2} na figura. Nesta notação o símbolo D_{QL} é utilizado para representar um deslocamento correspondente a uma ação redundante Q causado pelas cargas sobre a estrutura. Os sub-índices numéricos denotam a redundante que corresponde ao deslocamento.

Na Figura 7f, os deslocamentos D_{QL} apresentam-se na direção positiva, para cima. As direções positivas para os deslocamentos devem ser sempre as mesmas que as direções positivas para as redundantes que correspondem ao deslocamento. Como se supõe que as redundantes são positivas quando têm direção para cima, então os deslocamentos também são.

Figura 7: Ilustração do método da flexibilidade - exemplo 2.



Fonte: Sacoman (2012).

Para obterem-se os diferentes coeficientes de influência de flexibilidade que aparecem nas equações de compatibilidade, aplicam-se valores unitários das redundantes Q_1 e Q_2 na estrutura livre. Para a condição $Q_1 = 1$ ilustrada na Figura 7g, o coeficien-

te de flexibilidade F_{11} é o deslocamento correspondente a Q_1 devido a um valor unitário de Q_1 . Para a condição $Q_2 = 1$ ilustrada na Figura 7h, o coeficiente de flexibilidade F_{12} é o deslocamento correspondente a Q_1 devido a um valor unitário de Q_2 e F_{22} é o deslocamento correspondente a Q_2 devido a um valor unitário de Q_2 . Os coeficientes de flexibilidade se mostram em direções positivas.

As equações de superposição que expressam as condições de compatibilidade nos nós B e C da viga real podem agora ser escritas. Como os deslocamentos translacionais nos apoios B e C são zero, as equações são:

$$\begin{aligned} D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 &= 0 \\ D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

A primeira destas equações representa o deslocamento total em B que é formado por três partes: o deslocamento devido às cargas, o deslocamento devido à Q_1 e o deslocamento devido à Q_2 . A superposição dos três deslocamentos gera o deslocamento total que é igual a zero, o que acontece de forma similar na segunda equação.

É desejável escrever as equações de superposição de uma forma mais geral. Sempre é possível que os movimentos dos apoios correspondentes às redundantes tenham lugar na viga original e tais deslocamentos serem inclusos na análise. Suponha que D_{Q1} e D_{Q2} representam os deslocamentos reais na viga, correspondentes à Q_1 e à Q_2 . Portanto D_{Q1} representa o deslocamento do apoio B com a direção para cima como positiva e da mesma forma D_{Q2} representa o deslocamento do apoio C . As equações de superposição expressam que os deslocamentos finais correspondentes à Q_1 e à Q_2 são iguais às somas dos deslocamentos causados pelas cargas e redundantes, portanto as equações são:

$$\begin{aligned} D_{Q1} &= D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 \\ D_{Q2} &= D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Se não existirem os deslocamentos dos apoios, como é o caso deste exemplo, D_{Q1} e D_{Q2} são ambos zero e as Equações 7 se reduzem as Equações 6.

Podem-se escrever as equações de superposição (7) na forma matricial como:

$$D_Q = D_{QL} + FQ \quad (8)$$

onde D_Q é a matriz de deslocamentos reais correspondentes às redundantes; D_{QL} é a matriz de deslocamentos da estrutura livre correspondentes às ações redundantes Q e devido às cargas; e F é a matriz de flexibilidade para a estrutura livre correspondente às ações redundantes Q . Para as equações dadas anteriormente, essas matrizes são:

$$D_Q = \begin{pmatrix} D_{Q1} \\ D_{Q2} \end{pmatrix}, D_{QL} = \begin{pmatrix} D_{QL1} \\ D_{QL2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

Pode-se obter o vetor Q de redundantes resolvendo a Equação 8 desta forma:

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) \quad (9)$$

onde F^{-1} representa a inversa da matriz flexibilidade. Desta equação, as redundantes são calculadas depois de se obter as matrizes D_Q , D_{QL} e F .

A matriz D_Q normalmente é uma matriz nula, ou seja, todos seus elementos são iguais a zero, exceto quando uma ou mais redundantes é uma reação de apoio que tem um deslocamento de apoio correspondente. Como a matriz D_Q é nula, a Equação 9 para as ações redundantes Q torna-se:

$$Q = F^{-1}(0 - D_{QL}) = -F^{-1}D_{QL} \quad (10)$$

Pode-se utilizar esta equação sempre que os deslocamentos D_Q são zeros.

Para mostrar o uso das equações matriciais dadas anteriormente, considera-se a viga da Figura 7a. Para ter um exemplo específico, supõe-se que a viga tem uma rigidez à flexão constante EI em ambos os lados e que as ações sobre as vigas são:

$$P_1 = 2P, \quad M = PL, \quad P_2 = P \quad \text{e} \quad P_3 = P$$

Supõe-se também que não existem deslocamentos em nenhum dos apoios da estrutura. Deve-se encontrar primeiro as matrizes D_Q , D_{QL} e F como mencionado anteriormente. Como na viga original não existem deslocamentos correspondentes a Q_1 e Q_2 , a matriz D_Q é nula. A matriz D_{QL} representa dos deslocamentos da estrutura livre correspondentes às redundantes e causados pelas cargas. Estes deslocamentos se encontram considerando a Figura 7f que mostra a estrutura livre sob a ação de cargas. Os deslocamentos na viga correspondentes a Q_1 e Q_2 possuem os seguintes resultados:

$$D_{QL1} = \frac{13PL^3}{14EI}$$

$$D_{QL2} = \frac{97PL^3}{48EI}$$

Os sinais positivos dessas expressões mostram que os deslocamentos têm direção para cima. Dos resultados anteriores, pode-se obter o vetor D_{QL} :

$$D_{QL} = \frac{PL^3}{48EI} \begin{pmatrix} 26 \\ 97 \end{pmatrix}$$

A matriz de flexibilidade F se refere às vigas apresentadas nas Figuras. 7g e 7h. A

viga da Figura 7g, que está sujeita a uma carga unitária correspondente à Q_1 , tem deslocamentos dados pelas expressões:

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$F_{21} = \frac{5L^3}{6EI}$$

e, de forma similar, os deslocamentos na viga da Figura 7h são:

$$F_{12} = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$F_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

Dos resultados obtidos anteriormente, pode-se formar a matriz de flexibilidade:

$$F = \frac{L^3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

A inversa da matriz de flexibilidade tem como resultado:

$$F^{-1} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota-se que tanto a matriz de flexibilidade como sua inversa são simétricas. Na etapa final da análise, pode-se utilizar as Equações 10 para se obter as ações redundantes Q da seguinte maneira:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = -\frac{6EI}{7L^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \frac{PL^3}{48EI} \begin{pmatrix} 26 \\ 97 \end{pmatrix} = \frac{P}{56} \begin{pmatrix} 69 \\ -64 \end{pmatrix}$$

Desta expressão, pode-se notar que as reações verticais nos apoios B e C da viga

da Figura 7a são:

$$Q_1 = \frac{69P}{56} \text{ e } Q_2 = -\frac{8P}{7}$$

O sinal negativo de Q_2 indica que a reação tem direção para baixo.

As ações redundantes são obtidas da maneira apresentada no exemplo anterior. Podem-se encontrar as ações restantes da viga através das equações de equilíbrio estático. Os deslocamentos em qualquer ponto da viga podem ser obtidos sem nenhuma dificuldade já que todas as ações são conhecidas e uma maneira de se fazer isso é subdividir a viga em duas simplesmente apoiadas. Cada viga possui momentos desconhecidos nos extremos, assim como pelas cargas, e podem-se calcular os deslocamentos.

As equações matriciais do método da flexibilidade (Equações 8, 9 e 10) foram obtidas baseadas na viga exemplo da Figura 7, mas pode-se aplicar em qualquer estrutura reticulada estaticamente indeterminada de qualquer grau. Em geral, quando se tem n graus de indeterminação estática, a ordem da matriz de flexibilidade F será $n \times n$ e a ordem de todas as outras matrizes será $n \times 1$.

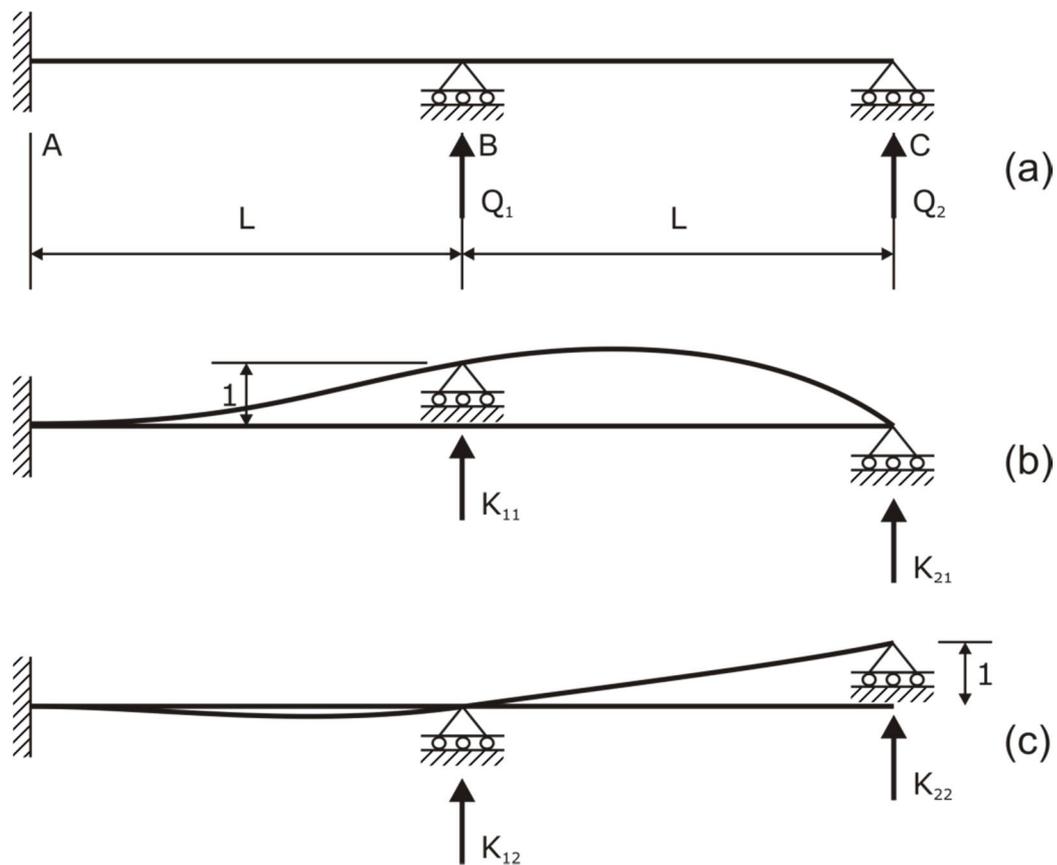
4.5.1.1 Inversa da matriz de flexibilidade

A análise de uma estrutura através do método da flexibilidade requer a determinação da matriz de flexibilidade F . Esta matriz é obtida calculando os deslocamentos na estrutura livre, invertendo F e substituindo na Equação 9 resolvendo o vetor Q de redundantes. Como a inversa da matriz de flexibilidade é uma matriz de rigidez, é natural a possibilidade de conhecer F^{-1} diretamente. Tal procedimento é possível, mas, como se mostra a seguir, a inversão da matriz de flexibilidade é uma etapa essencial na análise.

Cada matriz de flexibilidade e rigidez pode se associar como um jogo de ações e deslocamentos correspondentes. No caso da matriz F utilizada no método da flexi-

bilidade, as ações são redundantes que atuam sobre a estrutura livre. A matriz de flexibilidade é formada pelos deslocamentos correspondentes às redundantes e devido a seus valores unitários e, portanto, a inversa da matriz de flexibilidade é formada pelas ações correspondentes às redundantes e devido a valores unitários dos deslocamentos correspondentes a estas. Cada elemento da matriz é uma ação sobre a estrutura devido a um deslocamento unitário correspondente a uma redundante particular, enquanto que todos os outros deslocamentos correspondentes às redundantes são zero. Esta matriz rigidez, igual a F^{-1} , é denominada com o símbolo K .

Figura 8: Inversa da matriz de flexibilidade.



Fonte: Sacoman (2012).

Para mostrar o significado físico da matriz K , ilustra-se a viga de dois membros da Figura 8a. É a mesma viga considerada no exemplo anterior (Figura 7), e as redundantes são as reações Q_1 e Q_2 nos apoios B e C. Na Figura 8b, a viga é mostrada com um deslocamento unitário correspondente a Q_1 enquanto que o deslocamento correspondente a Q_2 é igual a zero. As ações correspondentes a Q_1 e Q_2 mostram-

se como K_{11} e K_{21} , que são os elementos da primeira coluna da matriz rigidez K . De modo similar, na Figura 8c, a viga está sujeita a um deslocamento unitário correspondente a Q_2 e as ações resultantes correspondentes a Q_1 e Q_2 se denominam K_{12} e K_{22} . A partir da avaliação destas ações para as vigas da figura, os resultados são:

$$K_{11} = \frac{96EI}{7L^3}, K_{12} = K_{21} = -\frac{30EI}{7L^3} \text{ e } K_{22} = \frac{12EI}{7L^3}$$

Portanto a matriz inversa K é

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz é a mesma que a matriz F^{-1} encontrada anteriormente para a mesma viga.

Se as quatro ações K_{11} , K_{12} , K_{21} e K_{22} são obtidas pelo método da flexibilidade utilizando Q_1 e Q_2 como redundantes, os cálculos da matriz de flexibilidade F e de sua inversa são necessários. Portanto, o trabalho de determinar a matriz K diretamente na estrutura, envolve as mesmas operações que o procedimento usual. Em geral, o método de solução mais conveniente através do método da flexibilidade consiste em determinar a matriz de flexibilidade a partir de uma análise da estrutura livre, inverter essa matriz e substituir na Equação 9 para encontrar as redundantes.

4.5.1.2 Algoritmo para o método da flexibilidade

A análise de uma estrutura através do método da flexibilidade é descrita através dos seguintes passos:

- 1 - Enunciado do problema.
- 2 - Seleção da estrutura livre.
- 3 - Análise da estrutura livre sob o efeito de cargas.
- 4 - Análise da estrutura livre para valores unitários das redundantes.
- 5 - Determinação das redundantes.
- 6 - Determinação de outros deslocamentos e ações.

4.5.2 Método da rigidez (Método dos deslocamentos)

O método da rigidez se difere do método da flexibilidade nos conceitos físicos que estão envolvidos, embora sejam similares em sua formulação matemática. Em ambos os métodos as equações fundamentais são obtidas utilizando o princípio da superposição. No método da flexibilidade, as entidades desconhecidas são as ações redundantes, porém no método da rigidez as incógnitas são os deslocamentos dos nós da estrutura, e portanto, o número de incógnitas que se deve calcular é igual ao grau de indeterminação cinemática ou grau de liberdade. O método da rigidez envolve o uso intenso de ações e deslocamentos em membros com as extremidades engastadas.

Para ilustrar os conceitos do método da rigidez, considera-se a análise da viga da Figura 9a. Esta viga tem um apoio engastado em A , um apoio móvel em B e está sujeita a uma carga uniformemente distribuída w . A viga é cinematicamente indeterminada de primeiro grau (despreza-se as deformações axiais), na qual o único deslocamento de nó desconhecido é a rotação θ_B no nó B . A primeira fase da análise é determinar essa rotação e após isso, determinar as diferentes ações e deslocamentos em toda a viga.

No método da flexibilidade, uma estrutura livre estaticamente determinada é obtida alterando a estrutura real de tal modo que as ações das redundantes selecionadas sejam zero. A operação análoga no método da rigidez é obter uma estrutura cinematicamente determinada alterando a estrutura real de modo que todos os deslocamentos desconhecidos sejam zero. Como os deslocamentos desconhecidos são as translações e rotações dos nós, pode-se igualá-los a zero impedindo que os nós da estrutura tenham deslocamentos de qualquer classe. A estrutura obtida ao restringir todos os nós da estrutura real se chama *estrutura fixa*. Para a viga da Figura 9a a estrutura fixa é obtida restringindo o nó B , impedindo qualquer rotação. Portanto, a estrutura fixa é a viga engastada mostrada na Figura 9b.

Quando as cargas atuam sobre a viga fixa (Figura 9b), existe um binário M_B que ocorre no apoio B . Este binário reativo tem o sentido horário e é dado pela expressão:

$$M_B = \frac{wL^2}{12} \quad (11)$$

Nota-se que o binário M_B é uma ação correspondente à rotação θ_B que é a entidade desconhecida na análise. Devido ao que existe no momento no nó B da viga real da Figura 9a, é necessário considerar que a viga fixa está sujeita a um momento igual e oposto ao momento M_B . Este momento se mostra atuando sobre a viga na Figura 9c. Quando as ações que atuam sobre as vigas em (b) e (c) se sobrepõem, produzem as ações sobre a viga real e, portanto, a análise da viga da Figura 9a pode ser considerada como a superposição dos elementos mostrados nas Figuras 9b e 9c e então, a rotação produzida pelo binário M_B na Figura 9c é igual a θ_B .

A relação entre o momento M_B e a rotação θ_B na viga da Figura 9c é:

$$M_B = \frac{4EI}{L} \theta_B \quad (12)$$

onde EI é a rigidez à flexão da viga. Igualando as expressões das Equações 11 e 12 tem-se:

$$\frac{wL^2}{12} = \frac{4EI}{L} \theta_B$$

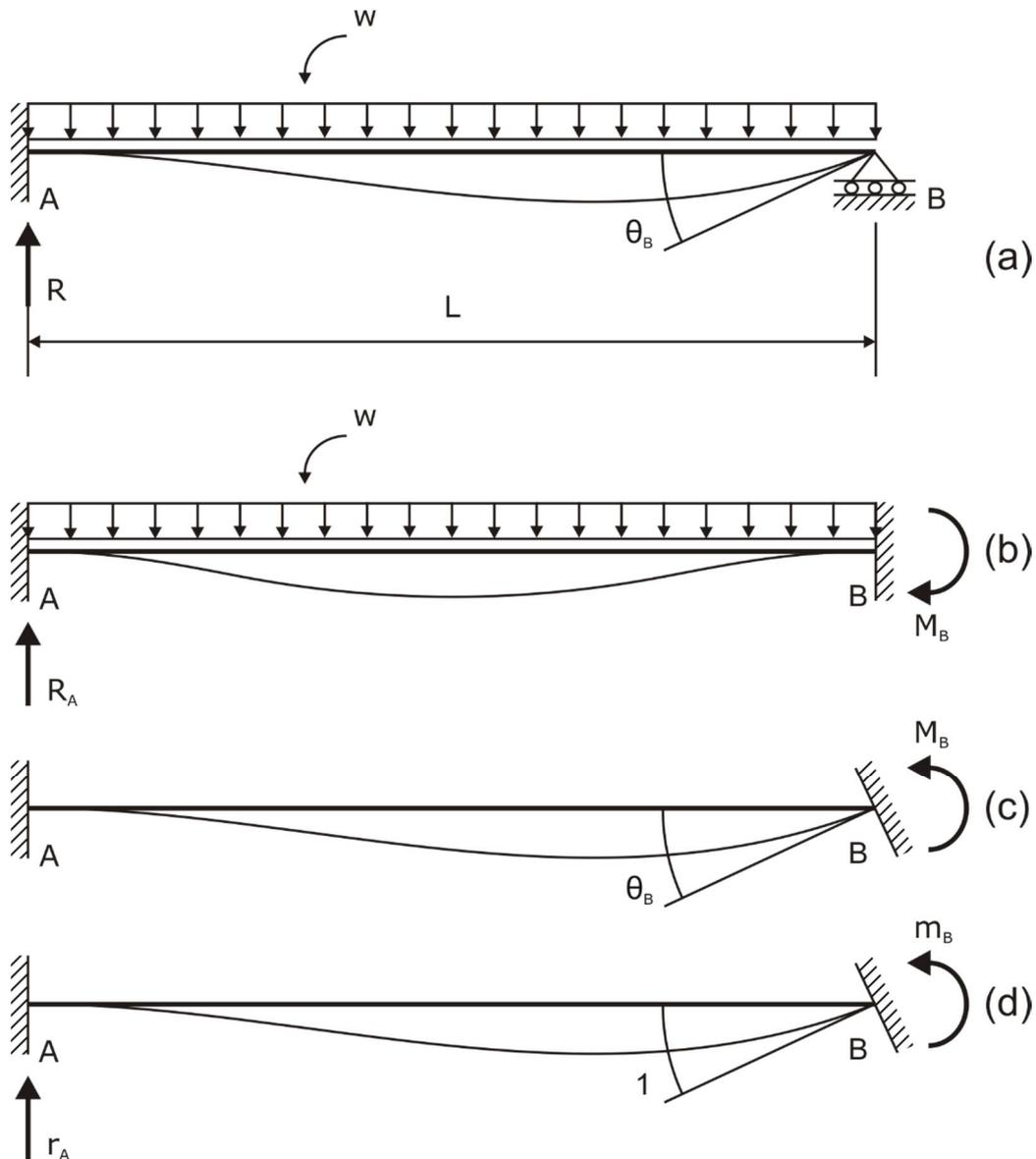
onde

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

Portanto, determina-se a rotação no nó B da viga.

De maneira análoga à utilizada no método da flexibilidade, é conveniente no exemplo anterior considerar a estrutura fixa sob o efeito de um valor unitário da rotação desconhecida. É necessário também formular a equação para a rotação como uma equação de superposição e utilizar uma convenção de sinais para todos os termos da equação. Este procedimento é utilizado para a viga da Figura 9.

Figura 9: Ilustração do método da rigidez - exemplo 1.



Fonte: Sacoman (2012).

O efeito de um valor unitário da rotação desconhecida se mostra na Figura 9d, onde a viga fixa está sujeita à ação de um binário m_B que produz um valor unitário da rotação θ_B . Como o momento m_B é uma ação correspondente à rotação θ_B e causado por um valor unitário da rotação, sabe-se que m_B é um *coeficiente de rigidez* para a estrutura fixa e seu valor é:

$$m_B = \frac{4EI}{L}$$

Ao formular a equação de superposição, os binários do nó B se sobrepõem da se-

guinte maneira: o binário na viga fixa sujeita a carga (Figura 9b) se soma com o binário m_B (correspondente a um valor unitário de θ_B) multiplicado por θ_B . Portanto, a soma desses termos deve dar o binário no nó B da viga real que neste exemplo é igual a zero. Todos os termos da equação de superposição se expressam com a mesma convenção de sinais, ou seja, todos os binários e rotações no nó B são positivos quando tem um sentido anti-horário. De acordo com essa convenção, o binário M_B na viga da Figura 9b é negativo:

$$M_B = -\frac{wL^2}{12}$$

A equação de superposição dos momentos no apoio B é:

$$M_B + m_B \theta_B = 0 \quad (13)$$

ou

$$-\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \theta_B = 0$$

Resolvendo esta equação obtém-se:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

que é o mesmo resultado obtido anteriormente. O sinal positivo no resultado significa que a rotação tem sentido anti-horário.

A parte fundamental na solução anterior consiste em escrever a equação de superposição (13) que expressa que o momento em B na viga real é zero. Nesta equação está incluso o momento provocado pelas cargas que atuam sob a estrutura fixa e o momento causado pela rotação da extremidade B . O último termo da equação é expresso como o produto do momento causado por um valor unitário do desloca-

mento desconhecido (coeficiente de rigidez) pelo deslocamento desconhecido. Os efeitos se somam algebricamente utilizando a mesma convenção de sinais para todos os termos da equação. A equação pode chamar-se *equação de superposição* ou *equação de equilíbrio de nó*.

Uma vez obtida a rotação desconhecida θ_B para a viga, é possível calcular outras entidades, tais como as ações nos extremos e as reações. Como exemplo, supõe-se que deva encontrar a força de reação R que atua no apoio A da viga (Figura 9a). Esta força é a soma da força reativa correspondente R_A no apoio A na Figura 9b e θ_B , multiplicada pela força r_A na Figura 9d, como se apresenta na seguinte equação de superposição:

$$R = R_A + \theta_B r_A$$

As forças R_A e r_A podem ser calculadas para a viga fixa:

$$R_A = \frac{wL}{2} \text{ e } r_A = \frac{6EI}{L^2}$$

Quando estes valores, assim como os encontrados previamente para θ_B são substituídos na equação anterior, o resultado é:

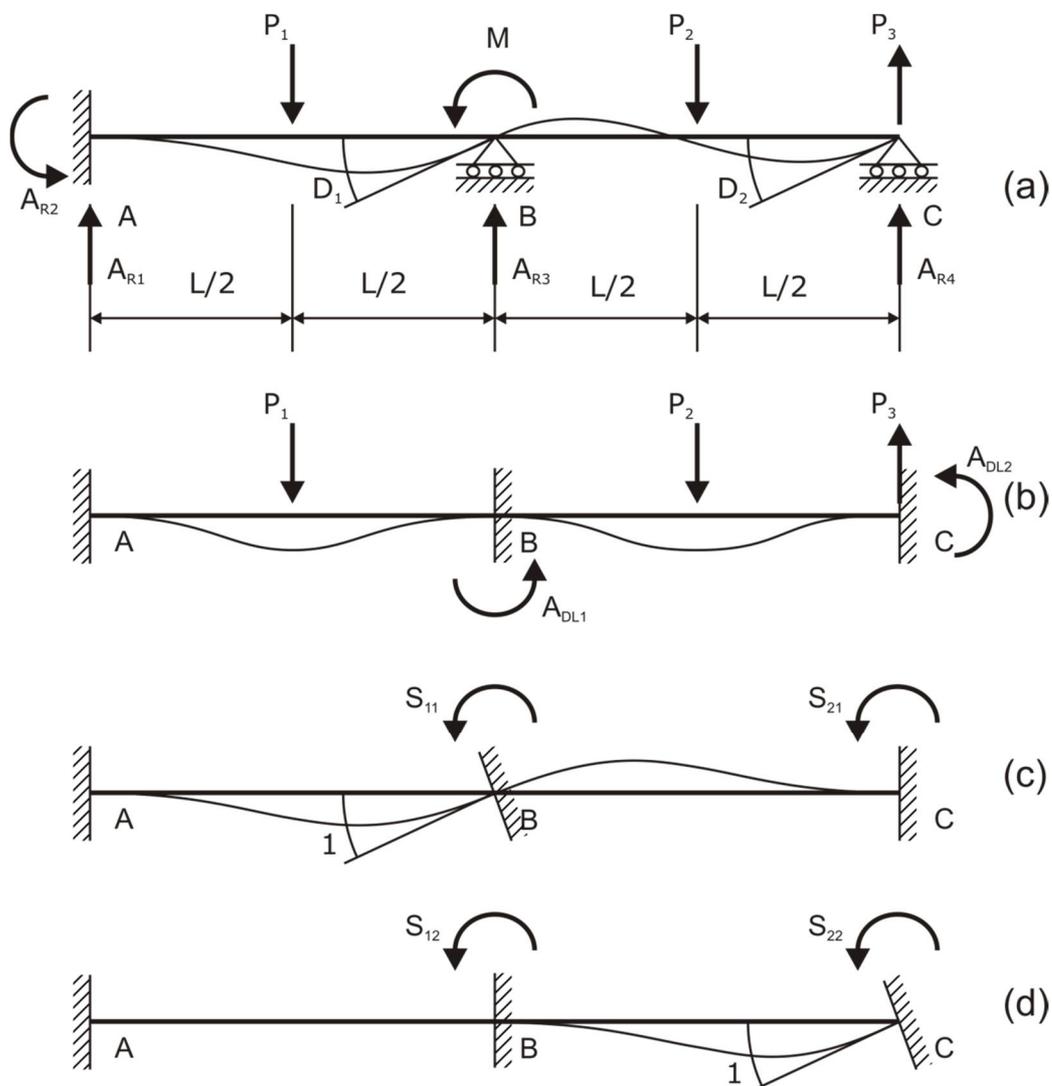
$$R = \frac{5wL}{8}$$

Podem-se utilizar os mesmos conceitos para calcular qualquer outra ação ou deslocamento da viga. Em todos os casos, devem-se encontrar primeiramente os deslocamentos dos nós desconhecidos.

Se uma estrutura é cinematicamente indeterminada de grau maior que um, deve-se introduzir uma aproximação mais organizada para a solução assim como uma notação mais generalizada. Para isso, se analisará a mesma viga de dois lados utilizada

anteriormente como exemplo para o método da flexibilidade, porém agora para o método da rigidez (Figura 10a). A viga tem uma rigidez à flexão constante igual a EI , está sujeita as cargas M , P_1 , P_2 e P_3 . Como os nós B e C podem sofrer rotações, a estrutura é cinematicamente indeterminada de segundo grau quando se despreza as deformações axiais. Sejam D_1 e D_2 os deslocamentos desconhecidos nestes pontos, respectivamente, e suponha que as rotações com sentido anti-horário são positivas, podem-se determinar esses deslocamentos desconhecidos resolvendo equações de superposição para as ações nos nós B e C como se descreve a seguir.

Figura 10: Ilustração do método da rigidez - exemplo 2.



Fonte: Sacoman (2012).

O primeiro passo na análise consiste em aplicar fixações imaginárias nos nós para prevenir todos os deslocamentos. A estrutura fixa que se obtém mostra-se na Figura 10b e é formada por duas vigas engastadas. Supõe-se que a estrutura fixa está sob a ação de cargas exceto aquelas que correspondem aos deslocamentos desconhecidos, portanto, mostram-se unicamente as cargas P_1 , P_2 e P_3 . Todas as cargas que correspondem aos deslocamentos de nós desconhecidos, tais como M neste exemplo, consideram-se posteriormente. Os momentos A_{DL1} e A_{DL2} (Figura 10b) são as ações das restrições (contra a estrutura fixa) correspondentes a D_1 e D_2 , respectivamente, e causadas por cargas que atuam sobre a estrutura, por exemplo, a ação de fixação ou restrição A_{DL1} é a soma do momento reativo em B devido à carga P_1 que atua sobre o membro AB e o momento reativo em B devido à carga P_2 que atua no membro BC . Estas ações podem ser encontradas com o auxílio de fórmulas para momentos de engastamento em vigas.

Para gerar os coeficientes de rigidez nos nós B e C introduz-se, separadamente na estrutura fixa, valores dos deslocamentos desconhecidos D_1 e D_2 . Um deslocamento unitário correspondente a D_1 consiste em uma rotação unitária do nó B como ilustra a Figura 10c. O deslocamento D_2 permanece igual a zero nesta viga e, portanto, as ações correspondentes a D_1 e D_2 são os coeficientes de rigidez S_{11} e S_{21} respectivamente. Estas rigidezes estão formadas pelos binários produzidos pelas fixações na viga nos nós B e C respectivamente. O cálculo destas ações não é difícil quando se conta com fórmulas para momentos de engastamento. A condição que D_2 é igual à unidade e D_1 igual a zero se mostra na Figura 10d. Na figura, a rigidez S_{12} é a ação correspondente a D_1 e S_{22} a D_2 . Nota-se que em cada caso o coeficiente de rigidez é a ação que a fixação artificial exerce sobre a estrutura.

Podem-se escrever agora duas equações de superposição que expressam as condições pertinentes aos momentos que atuam sobre a estrutura original (Figura 10a) nos nós B e C . Sejam as ações na estrutura real correspondentes a D_1 e D_2 chamadas A_{D1} e A_{D2} , respectivamente. Estas ações são zero em todos os casos exceto quando uma ação concentrada externa se aplica em um nó correspondente a um

grau de liberdade. Neste exemplo da Figura 10, a ação A_{D1} é igual a M e A_{D2} igual a zero. As equações de superposição expressam que as ações na estrutura original (Figura 10a) são iguais às ações correspondentes na estrutura fixa devido às cargas (Figura 10b) mais as ações correspondentes na estrutura fixa sob deslocamentos unitários (Figuras 10c e 10d) multiplicadas pelos próprios deslocamentos. Portanto as equações de superposição são:

$$\begin{aligned} A_{D1} &= A_{DL1} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 \\ A_{D2} &= A_{DL2} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 \end{aligned} \quad (14)$$

A convenção de sinais utilizada nessas equações é que os momentos são positivos quando tem o mesmo sentido (anti-horário) que os deslocamentos desconhecidos correspondentes.

Quando as Equações 14 se expressam na forma matricial, tem-se:

$$A_D = A_{DL} + SD \quad (15)$$

onde o vetor A_D representa as ações na viga original correspondentes aos deslocamentos de nós desconhecidos D , o vetor A_{DL} representa ações na estrutura fixa correspondentes aos deslocamentos de nó desconhecidos e causados pelas cargas e S é a matriz de rigidez. Para o exemplo da Figura 10, as matrizes são:

$$A_D = \begin{pmatrix} A_{D1} \\ A_{D2} \end{pmatrix}, A_{DL} = \begin{pmatrix} A_{DL1} \\ A_{DL2} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$$

Em geral, essas matrizes terão muitas linhas como existem deslocamentos de nós desconhecidos. Portanto, se d representa o número de deslocamentos desconhecidos, a ordem da matriz rigidez S é $d \times d$ e A_D , A_{DL} e D são vetores de ordem $d \times 1$.

Subtraindo A_{DL} de ambos os lados na Equação 15 e multiplicando por S^{-1} obtém-se a seguinte equação para os deslocamentos desconhecidos:

$$D = S^{-1}(A_D - A_{DL}) \quad (16)$$

Esta equação representa a solução para os deslocamentos nas condições da matriz devido aos elementos A_D , A_{DL} e D serem conhecidos ou poderem ser obtidos a partir da estrutura fixa. Além disso, as ações de extremo e reações da estrutura podem ser encontradas uma vez que se conheçam os deslocamentos dos nós.

Para demonstrar o uso da Equação 16, os dados de carga para análise da viga da Figura 10a são os seguintes:

$$P_1 = 2P, \quad M = PL, \quad P_2 = P \quad \text{e} \quad P_3 = P$$

Quando as cargas P_1 , P_2 e P_3 atuam sobre a estrutura fixa (Figura 10b), as ações A_{DL1} e A_{DL2} correspondentes a D_1 e D_2 , respectivamente, se desenvolvem nos apoios B e C . Como o binário M correspondente a um dos deslocamentos desconhecidos é dado por meio da matriz A_D , as ações A_{DL1} e A_{DL2} são encontradas a partir de fórmulas para momento de engastamento:

$$A_{DL1} = -\frac{P_1 L}{8} + \frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

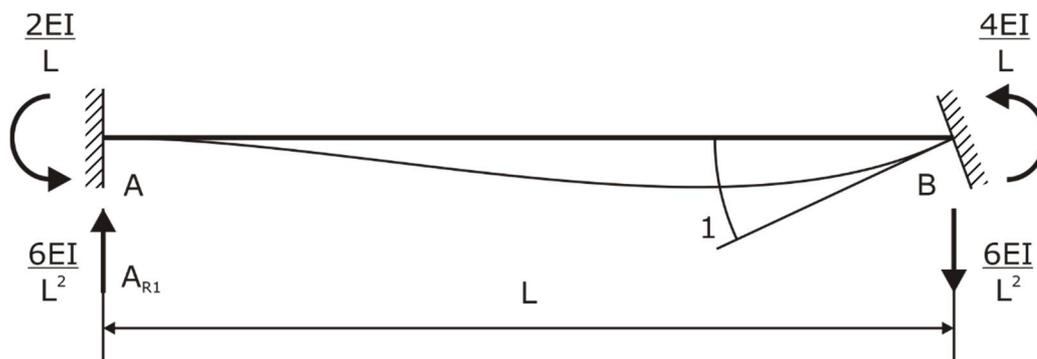
$$A_{DL2} = -\frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

Portanto, a matriz A_{DL} é:

$$A_{DL} = \frac{PL}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pode-se observar nestes cálculos que a carga P_3 não interfere na matriz A_{DL} e, portanto, não afeta nos cálculos para os deslocamentos de nó e sim nos cálculos para reações da viga real.

Figura 11: Rigidez de membro para uma viga.



Fonte: Sacoman (2012).

A matriz rigidez S consiste nos coeficientes de rigidez mostrados nas Figuras 10c e 10d. Cada coeficiente é um binário correspondente a um dos deslocamentos desconhecidos e devido a um valor unitário de um dos deslocamentos. Na Figura 10c mostram-se elementos da primeira coluna da matriz rigidez e na Figura 10d elementos da segunda coluna. Para encontrar estes coeficientes, considera-se primeiro a viga engastada mostrada na Figura 11. Esta viga está sujeita a uma rotação unitária no extremo B que tem como resultado $\frac{4EI}{L}$ e o momento no extremo oposto é $\frac{2EI}{L}$.

As forças reativas nos extremos da viga são iguais a $\frac{6EI}{L^2}$. Todas as ações mostradas na Figura 11 chamam-se *rigidez do membro*, graças às ações nos extremos do membro, devido a um deslocamento unitário de um extremo. O extremo da viga que sofre o deslocamento unitário é chamado de *extremo próprio* da viga e o extremo oposto de *extremo distante*.

A maneira de calcular as rigidezes de nó S_{11} e S_{21} na Figura 10c pode ser feita, portanto, mediante o uso das rigidezes do membro. Quando a viga gira um ângulo unitário no nó B , obtém-se um momento igual a $\frac{4EI}{L}$ devido à rotação do extremo do membro AB . Um momento de valor igual é obtido devido à rotação do extremo do membro BC . Portanto, o momento total em B , igual a S_{11} é:

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L} \quad (17)$$

A rigidez S_{21} é o momento obtido no nó C quando o nó B gira um ângulo unitário. Como o nó C é o extremo distante do membro, o coeficiente de rigidez é:

$$S_{21} = \frac{2EI}{L}$$

Tanto S_{11} como S_{21} são positivos devido a atuarem em sentido anti-horário. Os coeficientes de rigidez S_{12} e S_{22} são mostrados na Figura 10d, sendo o primeiro igual a $\frac{2EI}{L}$ que é uma ação no extremo distante do membro BC e, o segundo, igual a $\frac{4EI}{L}$ no extremo próximo do membro.

A matriz rigidez S pode ser formada com os coeficientes de rigidez descritos anteriormente:

$$S = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cada um dos elementos em S é uma *rigidez de nó* que representa a ação em um dos nós da estrutura devido a um valor unitário de um deslocamento de um dos nós. Neste exemplo, a rigidez de nó S_{11} é a soma das rigidezes de membro de extremo próximo com os membros que se unem nesse nó. De modo similar, a rigidez S_{22} é uma rigidez de membro de extremo próximo. Por outro lado, as rigidezes S_{12} e S_{21} são formadas por rigidezes de membro de extremo distante para membros que se conectam a um nó que tenha sofrido rotação. Em um exemplo mais geral, encontra-se que os elementos de rigidez da diagonal principal sempre estão compostos de rigidezes de extremo próximo enquanto que os que estão fora da diagonal podem ser rigidezes de extremo próximo ou distante. Uma vez determinada a matriz rigidez S , pode-se encontrar sua inversa:

$$S^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

A seguinte matriz a se determinar é a matriz A_D que representa as ações na estrutu-

ra real correspondentes aos deslocamentos unitários. Neste exemplo, a carga externa que corresponde à rotação D_1 é o binário M (igual a PL) no nó B . Não existe momento no nó C correspondente a D_2 e, portanto, a matriz A_D é:

$$A_D = \begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uma vez determinadas as matrizes A_D , S^{-1} e A_{DL} , pode-se encontrar a matriz de deslocamento D da estrutura real substituindo na Equação 16:

$$D = \frac{L}{14EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} PL \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{PL}{8} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{PL^2}{112EI} \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Portanto, as rotações D_1 e D_2 nos nós B e C são respectivamente:

$$D_1 = \frac{17PL^2}{112EI} \text{ e } D_2 = -\frac{5PL^2}{112EI} \quad (18)$$

O próximo passo, uma vez encontrados os deslocamentos de nó é determinar as ações de extremo e as reações da estrutura. Como no método da flexibilidade, existem duas abordagens para seguir quando se faz as operações manualmente. Uma delas é obter as ações de extremo assim como as reações efetuando cálculos separados uma vez encontrados os deslocamentos de nós. A outra maneira é efetuar os cálculos de modo sistemático simultaneamente com os cálculos para encontrar os deslocamentos. Utilizando o primeiro método, as ações de extremo são obtidas considerando cada membro em particular da estrutura. Para cada membro determinam-se os efeitos das cargas sobre o membro fixo e os efeitos dos deslocamentos nos extremos nos membros e posteriormente, combina-se esses resultados com as ações de extremo da viga original. Este método é bastante apropriado para um programa computacional e, portanto, foi utilizado no desenvolvimento deste trabalho.

O segundo método para encontrar ações de extremo e reações é apropriado para cálculos manuais, devido ser sistemático e generalizar-se facilmente. Para demonstrar as operações, considera-se novamente a viga de dois lados ilustrada na Figura 10. As matrizes de ações nos extremos dos membros e reações na estrutura real

(Figura 10a) se denominam A_M e A_R , respectivamente. Na estrutura fixa sujeita às cargas (Figura 10b), as matrizes de ações de extremo e reações correspondentes a A_M e A_R denominam-se A_{ML} e A_{RL} , respectivamente. Deve notar-se que quando se tem qualquer referência às cargas que atuam sobre a estrutura fixa, supõe-se que todas as cargas reais são levadas em consideração exceto aquelas que correspondem a um deslocamento desconhecido. Portanto, a carga de nó M mostrada na Figura 10a não aparece na estrutura fixa da Figura 10b. Considera-se que todas as outras cargas atuam sobre a viga fixa da Figura 10b, incluindo a carga P_3 . Essa carga não afeta as ações de extremo A_{ML} na estrutura fixa, mas sim, as reações A_{RL} . Cada uma das matrizes A_M e A_{ML} são de ordem $m \times 1$, supondo que m representa o número de ações de extremo e de forma igual, as matrizes A_R e A_{RL} são de ordem $r \times 1$, onde r representa o número de reações.

Na estrutura fixa sujeita a deslocamentos unitários (Figuras 10c e 10d), as matrizes de ações de extremo e reações se denominam A_{MD} e A_{RD} , respectivamente. A primeira coluna de cada uma das matrizes contém as ações obtidas da viga fixa na Figura 10c e a segunda coluna é formada por ações obtidas da viga na Figura 10d. No caso geral, as matrizes A_{MD} e A_{RD} são de ordem $m \times d$ e $r \times d$, respectivamente, onde d representa o número de deslocamentos desconhecidos.

As equações de superposição para as ações de extremo e reações na estrutura real podem ser expressas na forma matricial:

$$A_M = A_{ML} + A_{MD}D \quad (19)$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RD}D \quad (20)$$

As equações anteriores e a Equação 15 juntas constituem as três equações de superposição do método da rigidez. A solução completa de uma estrutura consiste em resolver a matriz D de deslocamentos da Equação 16 e logo substituir nas Equações 19 e 20 para determinar A_M e A_R . Quando feito isso, todos os deslocamentos de nó, ações de extremo e reações da estrutura são conhecidos.

Considera-se agora o uso das Equações 19 e 20 na solução da viga de dois lados ilustrada na Figura 10. Os deslocamentos desconhecidos D foram determinados previamente (Equação 18) e o que resta é determinar as matrizes A_{ML} , A_{RL} , A_{MD} e A_{RD} . Suponha que as ações de extremo que devem ser calculadas são a força cortante A_{M1} e o momento A_{M2} no extremo B do membro AB , e a força cortante A_{M3} e o momento A_{M4} no extremo B do membro BC . Supõe-se também que as reações que devem ser calculadas são a força A_{R1} e o binário A_{R2} no apoio A ; e as forças A_{R3} e A_{R4} nos apoios B e C . As duas primeiras reações são as mesmas da solução anterior e as duas últimas são as redundantes da mesma solução anterior. Consideram-se positivas todas essas ações quando tem direção para cima e em sentido anti-horário.

Na estrutura fixa sujeita às cargas (Figura 10b), os momentos de extremo e as reações em termos das cargas P_1 , P_2 e P_3 são os seguintes:

$$A_{ML1} = \frac{P_1}{2}, A_{ML2} = -\frac{P_1 L}{8}, A_{ML3} = \frac{P_2}{2} \text{ e } A_{ML4} = \frac{P_2 L}{8}$$

$$A_{RL1} = \frac{P_1}{2}, A_{RL2} = \frac{P_1 L}{8}, A_{RL3} = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} \text{ e } A_{RL4} = \frac{P_2}{2} - P_3$$

Os valores das cargas ($P_1 = 2P$, $P_2 = P$, $P_3 = P$) podem substituir nessas expressões, formando-se deste modo as matrizes A_{ML} e A_{RL} :

$$A_{ML} = \frac{P}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ -2L \\ 4 \\ L \end{pmatrix} \text{ e } A_{RL} = \frac{P}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ L \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

As matrizes A_{MD} e A_{RD} são obtidas de uma análise das vigas mostradas nas Figuras 10c e 10d. Por exemplo, a ação de extremo A_{MD11} é a força cortante no extremo B do membro AB devido a um deslocamento unitário correspondente a D_1 (Figura 10c). Portanto, essa ação de extremo é:

$$A_{MD11} = -\frac{6EI}{L^2}$$

como se pode ver na Figura 11. A reação A_{RD11} é a força vertical no apoio A da viga da Figura 10c e é:

$$A_{RD11} = \frac{6EI}{L^2}$$

De modo similar, as outras ações de extremo e as reações podem ser encontradas para a viga mostrada na Figura 10c. Estas entidades constituem as primeiras colunas das matrizes A_{MD} e A_{RD} . Os termos das segundas colunas são encontrados mediante análises similares e os resultados são apresentados a seguir:

$$A_{MD} = \frac{EI}{L^2} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4L & 0 \\ 6 & 6 \\ 4L & 2L \end{pmatrix} \text{ e } A_{RD} = \frac{EI}{L^2} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Substituindo as matrizes A_{ML} e A_{MD} dadas anteriormente, assim como a matriz D obtida previamente na Equação 19, obtém-se o seguinte resultado:

$$A_M = \frac{P}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ -2L \\ 4 \\ L \end{pmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4L & 0 \\ 6 & 6 \\ 4L & 2L \end{pmatrix} \frac{PL^2}{112EI} \begin{pmatrix} 17 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{P}{56} \begin{pmatrix} 5 \\ 20L \\ 64 \\ 36L \end{pmatrix}$$

Substituindo as matrizes A_{RL} , A_{RD} e D na Equação 20 podem-se encontrar as reações:

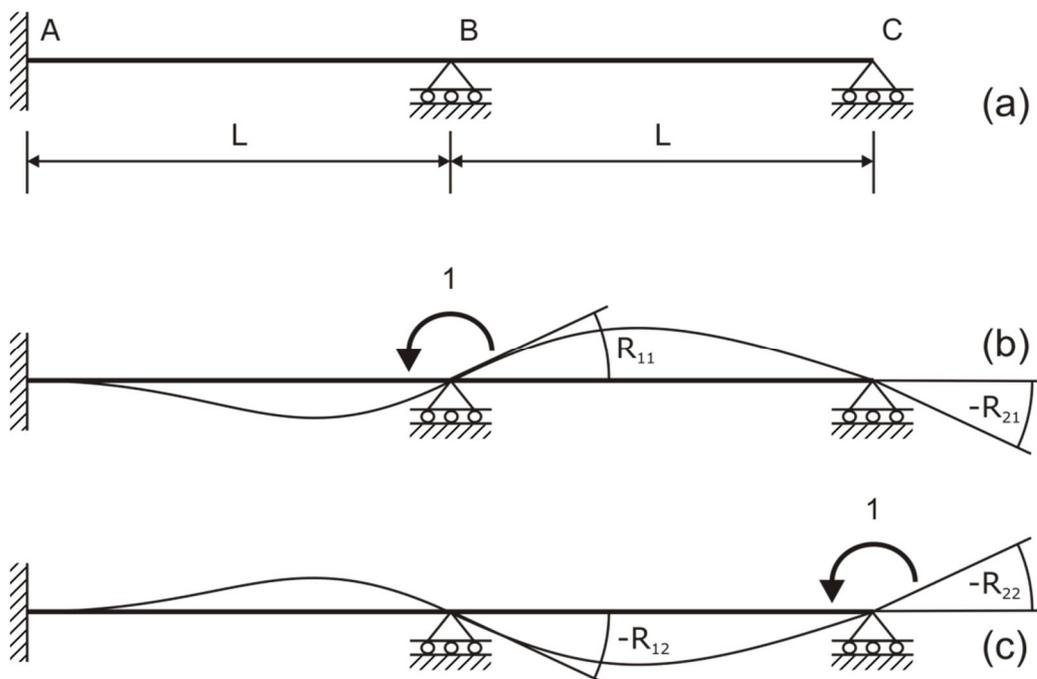
$$A_R = \frac{P}{56} \begin{pmatrix} 107 \\ 31L \\ 69 \\ -64 \end{pmatrix}$$

O método de solução descrito para a viga de dois lados é bastante geral em seus conceitos básicos e as equações matriciais 15 a 20 podem ser utilizadas na solução de qualquer tipo de estrutura reticulada.

4.5.2.1 Inversa da matriz de rigidez

A matriz rigidez S utilizada no método de análise de rigidez é invertida durante o processo de solução. A matriz inversa é uma matriz de flexibilidade, porém, não é a matriz flexibilidade F utilizada para analisar a mesma estrutura mediante o método da flexibilidade. Para que sejam iguais, as ações redundantes na solução pelo método da flexibilidade têm que corresponder aos deslocamentos desconhecidos do método da rigidez, o que é uma condição impossível. Esta falta de correspondência é mostrada referindo-se a viga de dois lados utilizada como exemplo (Figura 12a). No método da rigidez, os deslocamentos desconhecidos desta viga são as rotações nos nós B e C . No método da flexibilidade, as ações redundantes podem ser reações de apoio ou resultado de esforços internos. Não existe um jogo que forneça redundantes que corresponda aos deslocamentos conhecidos de nó.

Figura 12: Inversa da matriz de rigidez.



Fonte: Sacoman (2012).

O significado físico da inversa da matriz rigidez S é conhecido em qualquer estrutura em particular. Como a matriz S é formada por ações correspondentes aos deslocamentos de nó devido a valores unitários destes deslocamentos, a matriz inversa deve ser formada por deslocamentos de nó devido a valores unitários das ações correspondentes a esses deslocamentos. Para a viga de dois lados ilustrada na Figura 12, mostra-se nas partes (b) e (c) valores unitários das ações correspondentes aos deslocamentos de nó. Cada uma das ações unitárias é um binário devido aos deslocamentos de nó com giros. Os giros nos nós devido a estes binários unitários são os elementos da matriz inversa S^{-1} , a que se denomina pelo símbolo R . Portanto, na figura os giros são denominados por R_{11} , R_{21} , R_{12} e R_{22} onde o primeiro sub-índice denota o deslocamento e o segundo, a carga unitária que causa este deslocamento. Todos os giros são positivos quando têm sentido anti-horário. Os resultados para estas rotações de nós são os seguintes:

$$R_{11} = \frac{L}{7EI}, R_{12} = R_{21} = -\frac{L}{14EI} \text{ e } R_{22} = \frac{2L}{7EI}$$

Portanto, a matriz inversa R é:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \frac{L}{14EI} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

que é a mesma que a matriz S^{-1} encontrada anteriormente.

A determinação direta da matriz rigidez S geralmente é o método de solução preferido. Envolve uma análise da estrutura fixa para valores unitários de cada deslocamento de nó, o que não se torna difícil já que se conhecem os coeficientes de rigidez para cada membro. Por outro lado, a determinação direta da matriz inversa R requer uma análise das vigas mostradas nas Figuras 12b e 12c. Desta análise pode-se desenvolver mediante o método da rigidez, que neste caso é necessário obter S pelo modo usual e depois se deve inverter S para completar a análise e encontrar os giros nos nós das duas vigas. Portanto, qualquer tentativa para encontrar diretamente as rotações R mostradas na figura, inclui os mesmos passos que os utiliza-

dos no procedimento usual.

4.5.2.2 Algoritmo para o método da rigidez

A análise de uma estrutura através do método da rigidez é descrita através dos seguintes passos:

- 1 - Enunciado do problema.
- 2 - Estrutura fixa.
- 3 - Análise da estrutura fixa sob o efeito de cargas.
- 4 - Análise da estrutura fixa para valores unitários dos deslocamentos.
- 5 - Determinação dos deslocamentos.
- 6 - Determinação de ações de extremo e reações.

4.5.3 Comparação entre os métodos da flexibilidade e rigidez

Os métodos da flexibilidade e da rigidez são muito similares em sua formulação matemática e ambos necessitam do princípio da superposição para obterem-se as equações fundamentais. Pode-se ver rapidamente suas semelhanças e diferenças quando comparados simultaneamente como ilustra o Quadro 1 mostrando os principais passos na solução de uma estrutura pelos dois métodos.

No método da flexibilidade, a seleção de redundantes pode ter um efeito significativo na quantidade de trabalho de cálculo necessário como, por exemplo, em vigas contínuas geralmente são selecionados os momentos fletores nos apoios como redundantes devido à estrutura livre consistir em uma série de vigas livremente apoiadas. Esta estrutura livre é fácil de analisar tanto para os efeitos das cargas como para os efeitos dos valores unitários das redundantes. A aplicação de um valor unitário de cada redundante influencia unicamente nos lados adjacentes da viga. No caso de estruturas que não sejam vigas contínuas, normalmente não é possível localizar os efeitos quando se utiliza o método da flexibilidade.

Quadro 1 - Comparação dos métodos

Método da Flexibilidade	Método da Rigidez
(a) Enunciado do problema	
(b) Seleção de incógnitas	
Redundantes Q	Deslocamentos de nó D
(c) Incógnitas iguais a zero	
Estrutura livre	Estrutura fixa
(d) Efeitos das cargas	
$D_{QL}, D_{JL}, A_{ML}, A_{RL}$	$A_D, A_{DL}, A_{ML}, A_{RL}$
(e) Efeitos de outras causas	
$D_Q, D_{QT}, D_{QP}, D_{QR}$	A_{DT}, A_{DP}, A_{DR}
D_{JT}, D_{JP}, D_{JR}	A_{MT}, A_{MP}, A_{MR}
	A_{RT}, A_{RP}, A_{RR}
(f) Soma de todos os efeitos	
$D_{QS} = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + D_{QR}$	$A_{DS} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR}$
$D_{JS} = D_{JL} + D_{JT} + D_{JP} + D_{JR}$	$A_{MS} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR}$
	$A_{RS} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR}$
(g) Efeitos de valores unitários das incógnitas	
$F, D_{JQ}, A_{MQ}, A_{RQ}$	S, A_{MD}, A_{RD}
(h) Inversão das matrizes	
F^{-1}	S^{-1}
(i) Equações de superposição	
$D_Q = D_{QS} + FQ$ ou $Q = F^{-1}(D_Q - D_{QS})$	$A_D = A_{DS} + SD$ ou $D = S^{-1}(A_D - A_{DS})$
$D_J = D_{JS} + D_{JQ}Q$ $A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q$ $A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q$	$A_M = A_{MS} + A_{MD}D$ $A_R = A_{RS} + A_{RD}D$

Fonte: Gere e Weaver (1987)

No método da rigidez, nunca existe dúvida sobre a seleção da estrutura fixa já que só existe uma possibilidade. A análise da estrutura fixa normalmente não é difícil devido a todos os efeitos serem localizados como, por exemplo, o efeito de um deslocamento unitário em um nó está limitado aos membros que se ligam a este nó.

Em geral ambos os métodos de análise são úteis para cálculos manuais. O método

de solução preferido usualmente será o que envolve menor quantidade de incógnitas. Para a programação computacional o método da rigidez geralmente é muito mais apropriado que o da flexibilidade, pois tem como vantagem a determinação automática da estrutura fixa e a certeza de que todos os efeitos estão localizados.

5 SISTEMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE ESTRUTURAL

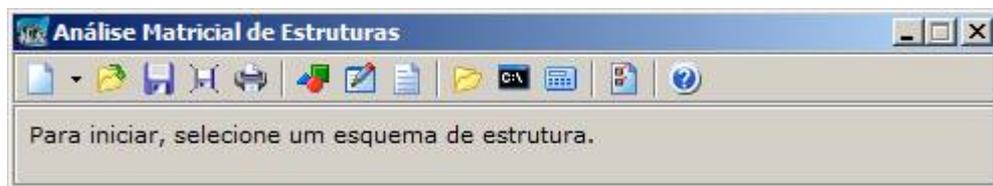
O desenvolvimento deste projeto resultou em um produto que foi batizado de *AME - Análise Matricial de Estruturas*.

Este capítulo apresenta as principais interfaces presentes no sistema computacional AME e os testes e resultados obtidos com sua utilização são apresentados no capítulo que segue. Outras funcionalidades estão presentes no sistema e são apenas ferramentas que podem ser utilizadas pelo usuário para auxiliar seu trabalho.

5.1 Fôrma principal

A fôrma principal, ou janela principal, é a primeira fôrma apresentada ao usuário e contém todas as funcionalidades existentes no sistema computacional desenvolvido. Sua interface é apresentada na Figura 13:

Figura 13: Fôrma principal.

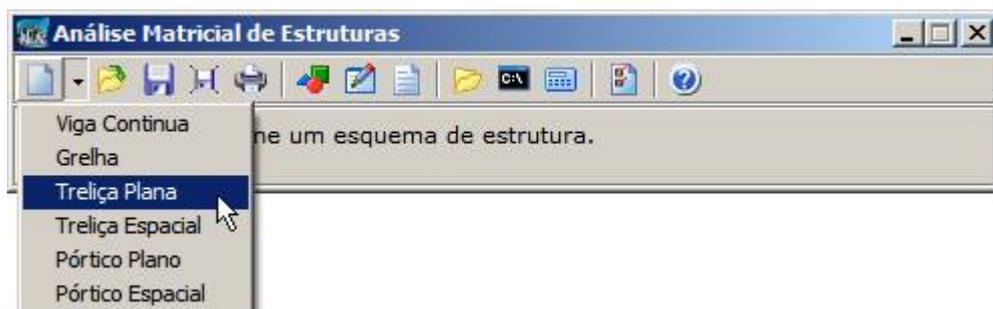


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2 Seleção do tipo de estrutura reticulada

Nessa seção, o usuário escolhe em qual tipo de estrutura reticulada (viga contínua, grelha, treliça plana, treliça espacial, pórtico plano ou pórtico espacial) será feita a análise. Sua interface é apresentada na Figura 14:

Figura 14: Seleção do tipo de estrutura.

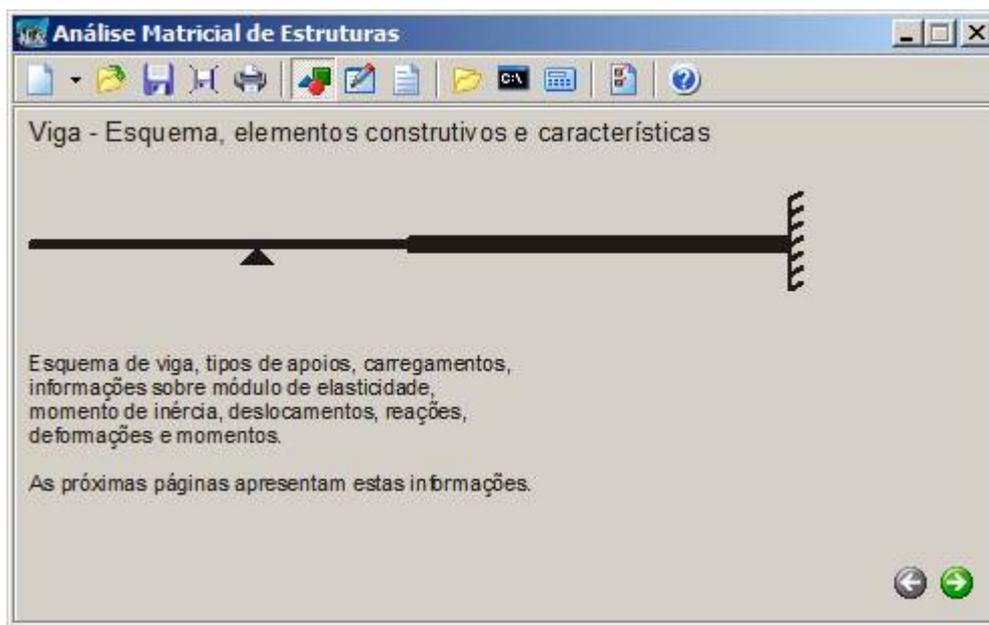


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Mostrar esquema

Após o usuário escolher o tipo de estrutura reticulada para a análise, é possível a visualização do esquema da mesma com uma breve descrição. Na Figura 15 é utilizada, como exemplo, a estrutura viga contínua para a visualização de seu esquema:

Figura 15: Esquema da viga contínua.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Dados

Após a escolha de uma estrutura reticulada para análise, uma fôrma complementar para a entrada de dados e apresentação de resultados é acoplada à fôrma principal. Todos os tipos de estruturas reticuladas integrados no sistema computacional desenvolvido possuem uma sequência padrão para a entrada de dados e obtenção de resultados, diferindo apenas na quantidade de valores fornecidos e obtidos. Esta seção pode estar aberta juntamente com a Seção 5.3 - Mostrar esquema, descrita anteriormente.

Para ilustrar, utiliza-se, como exemplo, a estrutura viga contínua e as quatro seções para entrada e saída de dados, que são apresentadas nas Figuras 16, 17, 18 e 19.

Figura 16: Entrada de dados 1.

Análise Matricial de Estruturas

Viga Continua

Dados da estrutura

M NR NRJ E NJ N

3 5 3 10000,0 4 3

Designação, comprimento e momento de inércia dos membros / Restrições dos nós

Membro	L	IZ
1	100,0	1000,0
2	100,0	2000,0
3	200,0	2000,0

Nó	Restrição Y	Restrição Z
1	1	1
3	1	0
4	1	1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Variáveis para entrada dos dados apresentados na Figura 16:

M: Número de membros

NR: Número de restrições

NRJ: Número de nós restringidos

E: Módulo de elasticidade

NJ: Número de nós

N: Número de graus de liberdade

L: Comprimento

IZ: Momento de inércia

Figura 17: Entrada de dados 2.

Viga Contínua

Dados da carga

NLJ: 2 NLM: 3

Ações aplicadas nos nós / Ações nos extremos dos membros restringidos devido as cargas

Nó	Ação Y	Ação Z
2	-10,0	1000,0
3	-10,0	0,0

Membro	AML1	AML2	AML3	AML4
1	10,0	250,0	10,0	-250,0
2	10,0	250,0	10,0	-250,0
3	10,0	333,333	10,0	-333,333

Fonte: Elaborada pelo autor.

Variáveis para entrada dos dados apresentados na Figura 17:

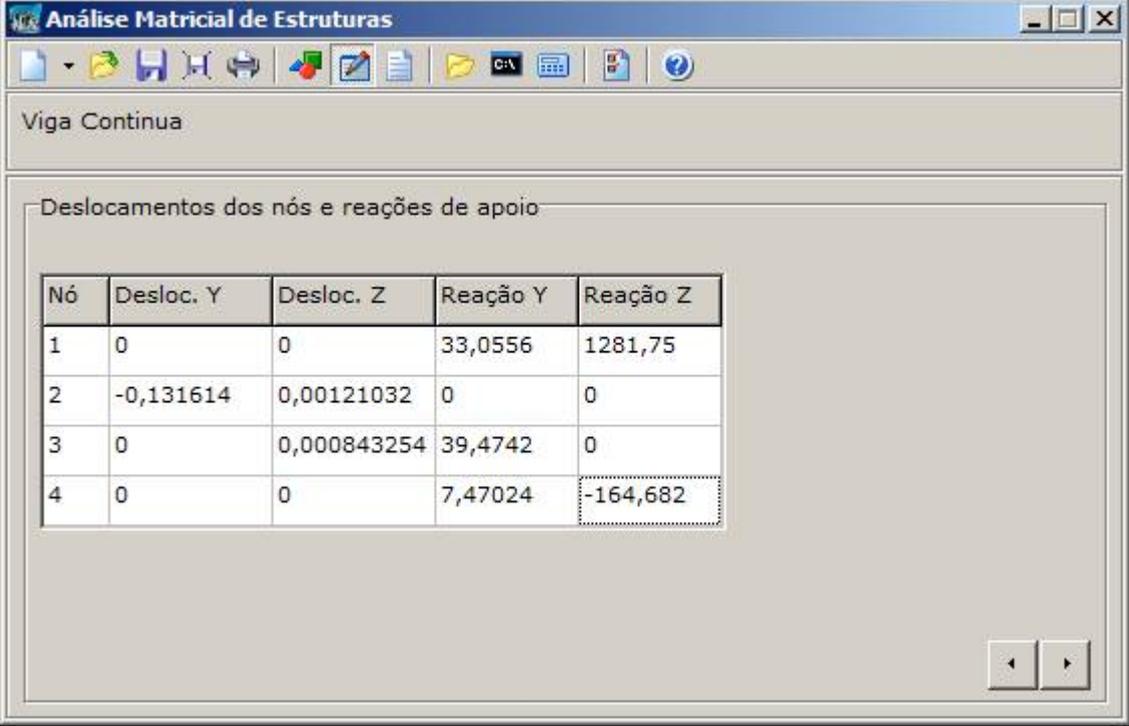
NLJ: Número de nós carregados

NLM: Número de membros carregados

AML1, AML3: Reações de engastamento perfeito

AML2, AML4: Momentos de engastamento perfeito

Figura 18: Apresentação de resultados 1.



Viga Continua

Deslocamentos dos nós e reações de apoio

Nó	Desloc. Y	Desloc. Z	Reação Y	Reação Z
1	0	0	33,0556	1281,75
2	-0,131614	0,00121032	0	0
3	0	0,000843254	39,4742	0
4	0	0	7,47024	-164,682

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19: Apresentação de resultados 2.



Viga Continua

Ações de extremos dos membros

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	33,055557	1281,7461	-13,055557	1023,8096
2	3,0555567	-23,809571	16,944443	-670,63476
3	12,529763	670,63476	7,4702368	-164,68212

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5 Solução

Após a realização de todos os cálculos para a análise da estrutura reticulada escolhida, é possível a visualização de um relatório com os valores correspondentes da solução do problema. Na Figura 20 é utilizado, como exemplo, o relatório final da estrutura viga contínua para a visão de seus respectivos dados e, na Figura 21, sua ampliação:

Figura 20: Relatório da viga contínua.

The screenshot shows a software window titled "Previsão da Impressão" with a toolbar and a search bar. The main content area displays a report with the following sections and data:

Membro, Comprimento, Momento de Inércia e Ações nos Extremos

Membro	L	IZ	AML1	AML2	AML3	AML4
1	100	1000	10	250	10	-250
2	100	2000	10	250	10	-250
3	200	2000	10	333,333	10	-333,333

Nó, Restrições e Ações

Nó	Restrição Y	Restrição Z	Ação Y	Ação Z
1	1	1	0	0
2	0	0	-10	1000
3	1	0	-10	0
4	1	1	0	0

Nó, Deslocamentos e Reações

Nó	Desloc. Y	Desloc. Z	Reação Y	Reação Z
1	0	0	33,0556	1281,75
2	-0,131614	0,00121032	0	0
3	0	0,000843254	39,4742	0
4	0	0	7,47024	-164,682

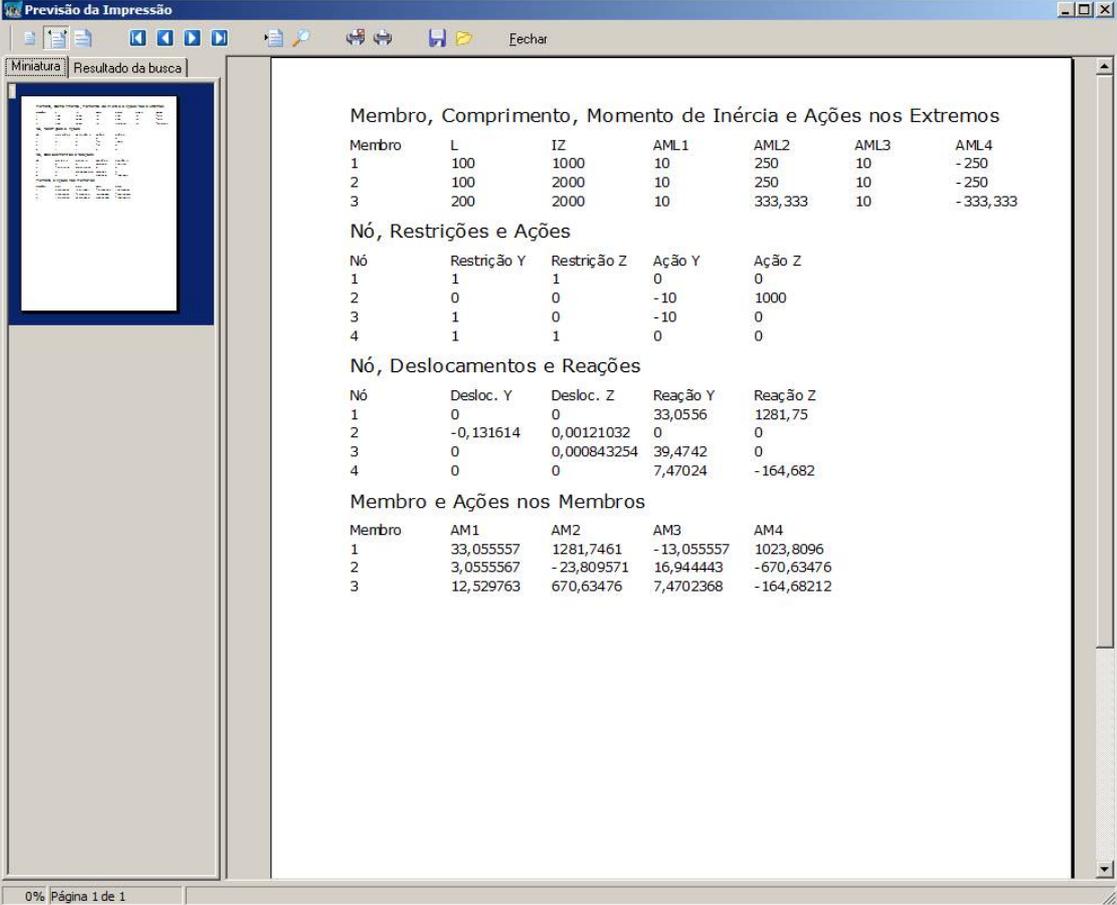
Membro e Ações nos Membros

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	33,055557	1281,7461	-13,033557	1023,8096
2	3,0555567	-23,809571	16,944443	-670,63476
3	12,529763	670,63476	7,4702368	-164,68212

At the bottom of the window, it says "0% Página 1 de 1".

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21: Relatório ampliado da viga contínua.



Membro, Comprimento, Momento de Inércia e Ações nos Extremos

Membro	L	IZ	AML1	AML2	AML3	AML4
1	100	1000	10	250	10	-250
2	100	2000	10	250	10	-250
3	200	2000	10	333,333	10	-333,333

Nó, Restrições e Ações

Nó	Restrição Y	Restrição Z	Ação Y	Ação Z
1	1	1	0	0
2	0	0	-10	1000
3	1	0	-10	0
4	1	1	0	0

Nó, Deslocamentos e Reações

Nó	Desloc. Y	Desloc. Z	Reação Y	Reação Z
1	0	0	33,0556	1281,75
2	-0,131614	0,00121032	0	0
3	0	0,000843254	39,4742	0
4	0	0	7,47024	-164,682

Membro e Ações nos Membros

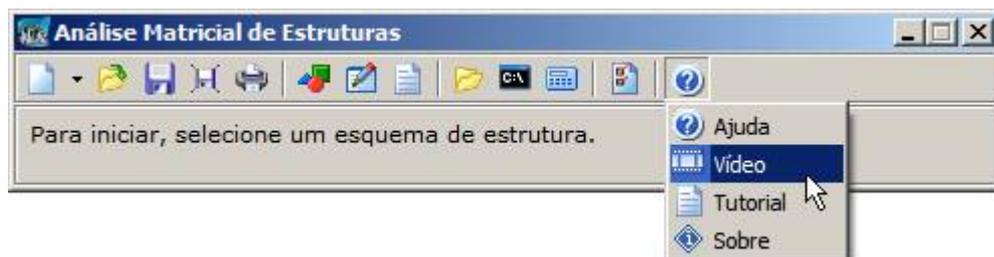
Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	33,055557	1281,7461	-13,055557	1023,8096
2	3,0555567	-23,809571	16,944443	-670,63476
3	12,529763	670,63476	7,4702368	-164,68212

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.6 Ajuda

A seção ajuda contém todos os elementos necessários para auxiliar o usuário com dúvidas, sendo dividida em quatro seções: arquivo de ajuda, vídeo demonstrativo, tutorial e sobre, ilustrada pela Figura 22:

Figura 22: Ajuda.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 UTILIZAÇÃO DO SISTEMA

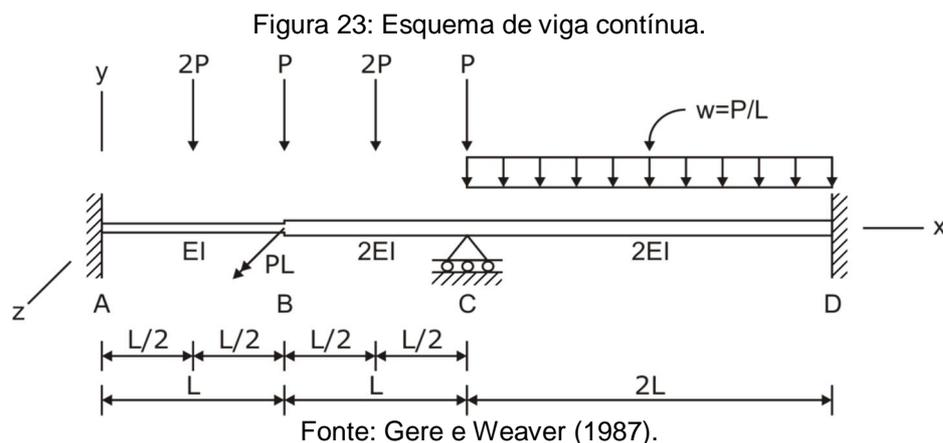
Para apresentar a utilização do Sistema para os diferentes tipos de estruturas, seguem as entradas de dados e as soluções obtidas para viga contínua, treliça plana, pórtico plano, grelha, treliça espacial e pórtico espacial cujos esquemas são representados nas Figuras 23 a 28.

Todos os exemplos foram extraídos de Gere e Weaver (1987) e os quadros não numerados, de cada exemplo, representam as etapas de entrada de dados e de solução do problema conforme apresentadas no Capítulo 5.

Todos os exemplos apresentaram soluções corretas e precisas quando comparadas com as do livro.

6.1 Viga contínua

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 363, para verificar a funcionalidade do módulo de viga contínua do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.



Entrada de dados

Nós, vinculações e carregamentos:

Nó	R_x	R_y	Ação y	Ação z
1	1	1	0	0
2	0	0	-10	1000
3	1	0	-10	0
4	1	1	0	0

Membros, comprimentos, momentos de inércia e ações de engastamento perfeito:

Membro	L	I_z	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄
1	100	1000	10	250	10	-250
2	100	2000	10	250	10	-250
3	200	2000	10	333,333	10	-333,333

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Deslocamento y	Deslocamento z	Reação y	Reação z
1	0	0	33,06	1281,75
2	-0,1316	0,001210	0	0
3	0	0,000843	39,47	0
4	0	0	7,47	-164,68

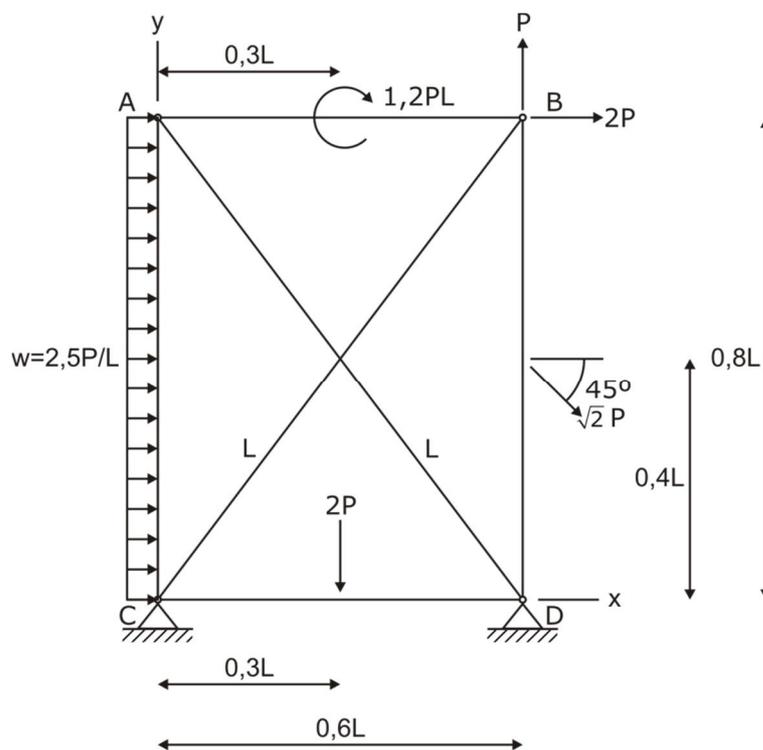
Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	33,06	1281,75	-13,06	1023,81
2	3,06	-23,81	16,94	-670,64
3	12,53	670,64	7,47	-164,68

6.2 Treliça plana

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 380, para verificar a funcionalidade do módulo de treliça plana do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.

Figura 24: Esquema de treliça plana.



Fonte: Gere e Weaver (1987).

Entrada de dados

Nós, coordenadas, vinculações e carregamentos:

Nó	x	y	R _x	R _y	Ação x	Ação y
1	0	80	0	0	0	0
2	60	80	0	0	20	10
3	0	0	1	1	0	0
4	60	0	1	1	0	0

Membros, propriedades dos membros e ações de engastamento perfeito:

Membro	JJ	JK	AX	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄
1	1	2	6	0	-20	0	20
2	3	4	6	0	10	0	10
3	3	1	8	0	10	0	10
4	4	2	8	5	5	5	5
5	1	4	10	0	0	0	0
6	3	2	10	0	0	0	0

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Deslocamento x	Deslocamento y	Reação x	Reação y
1	0,1000	0,04147	0	0
2	0,1061	-0,04020	0	0
3	0	0	-28,90	-56,67
4	0	0	-21,10	76,67

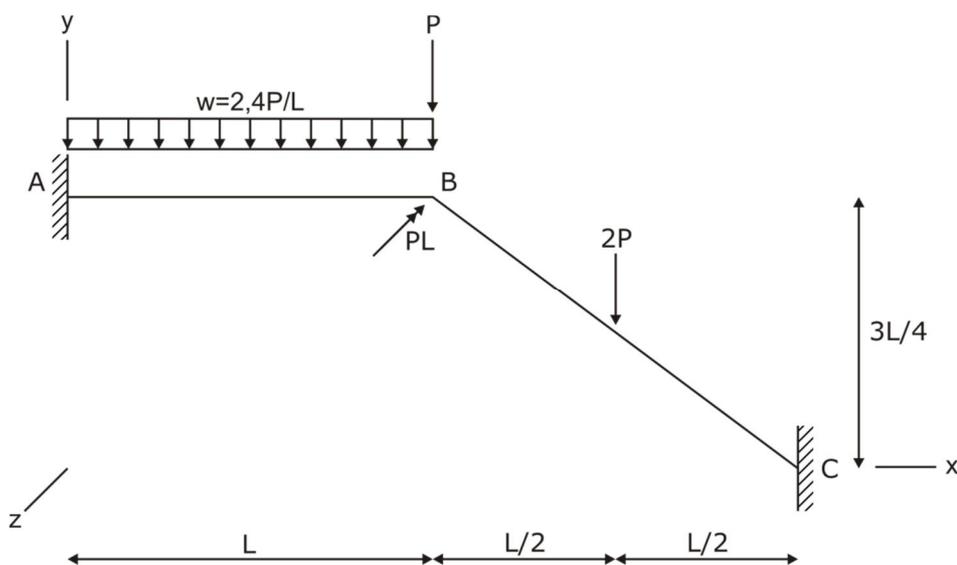
Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	-6,10	-20,0	6,10	20,0
2	0	10,0	0	10,0
3	-41,47	10,0	41,47	10,0
4	45,20	5,0	-35,20	5,0
5	26,83	0	-26,83	0
6	-31,50	0	31,50	0

6.3 Pórtico plano

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 388, para verificar a funcionalidade do módulo de pórtico plano do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.

Figura 25: Esquema de pórtico plano.



Fonte: Gere e Weaver (1987).

Entrada de dados

Nós, coordenadas, vinculações e carregamentos:

Nó	x	y	R_x	R_y	R_z	Ação x	Ação y	Ação z
1	100	75	0	0	0	0	-10	-1000
2	0	75	1	1	1	0	0	0
3	200	0	1	1	1	0	0	0

Membros, propriedades dos membros e ações de engastamento perfeito:

Membro	JJ	JK	AX	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄	AML ₅	AML ₆
1	2	1	10	0	12	200	0	12	-200
2	1	3	10	-6	8	250	-6	8	-250

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Deslocamento x	Deslocamento y	Deslocamento z	Reação x	Reação y	Reação z
1	-0,02026	-0,09936	-0,001797	0	0	0
2	0	0	0	20,26	13,14	436,6
3	0	0	0	-20,26	40,86	-889,5

Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	20,26	13,14	436,6	-20,26	10,86	-322,9
2	28,72	-4,53	-677,1	-40,73	20,53	-889,5

6.4 Grelha

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 404, para verificar a funcionalidade do módulo de grelha do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.

Entrada de dados

Nós, coordenadas, vinculações e carregamentos:

Nó	x	y	R _x	R _y	R _z	Ação x	Ação y	Ação z
1	100	75	0	0	0	0	1000	-10
2	0	75	1	1	1	0	0	0
3	200	0	1	1	1	0	0	0

Membros, propriedades dos membros e ações de engastamento perfeito:

Membro	JJ	JK	IX	IY	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄	AML ₅	AML ₆
1	2	1	1000	1000	0	-200,0	12	0	200,0	12
2	1	3	1000	1000	0	-312,5	10	0	312,5	10

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Deslocamento x	Deslocamento y	Deslocamento z	Reação x	Reação y	Reação z
1	-0,007599	0,005095	-0,3551	0	0	0
2	0	0	0	303,9	-1311,5	24,04
3	0	0	0	1193,1	1103,5	29,96

Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	20,260769	13,137825	436,64755	-20,260769	10,862175	-322,86504
2	28,72592	-4,5332787	-677,13496	-40,72592	20,533279	-889,52488

6.5 Treliça espacial

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 411, para verificar a funcionalidade do módulo de treliça espacial do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.

Entrada de dados

Nós, coordenadas, vinculações e carregamentos:

Nó	x	y	z	R _x	R _y	R _z	Ação x	Ação y	Ação z
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
2	75	0	0	0	1	1	0	0	0
3	0	100	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	100	0	0	1	30	40	0

Membros, propriedades dos membros e ações de engastamento perfeito:

Membro	JJ	JK	AX	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄	AML ₅	AML ₆
1	1	2	10	0	0	0	0	0	0
2	1	3	10	-20	20	-10	-20	20	-10
3	1	4	10	0	0	0	0	0	0
4	2	3	10	0	0	0	0	0	0
5	2	4	10	5	10	5	5	10	5
6	3	4	10	0	0	0	0	0	0

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Desl ocamento x	Desl ocamento y	Desl ocamento z	Reação x	Reação y	Reação z
1	0	0	0	-56,18	-20,0	-10,0
2	0,02714	0	0	0	-0,42	50,33
3	0	0	0	-27,82	-39,58	20,0
4	0,1556	0,08485	0	0	0	-78,33

Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	-36,18	0	0	36,18	0	0
2	-20,00	20,0	-10,0	-20,00	20,0	-10,0
3	0	0	0	0	0	0
4	-13,03	0	0	13,03	0	0
5	66,67	10,0	5,0	-56,67	10,0	5,0
6	42,43	0	0	-42,43	0	0

6.6 Pórtico espacial

Segue um exemplo proposto em Gere e Weaver (1987) à página 422, para verificar a funcionalidade do módulo de pórtico espacial do Sistema de Análise Matricial de Estruturas.

Entrada de dados

Nós, coordenadas, vinculações e carregamentos:

Nó	Translação			Rotação			Ação			Momento					
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z			
1	0	120	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
2	240	120	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-120
3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
4	360	0	120	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Membros, propriedades dos membros e ações de engastamento perfeito:

Membro	JJ	JK	AX	IX	IY	IZ	AA	XP	YP	ZP
1	1	2	11	83	56	56	0	0	0	0
2	3	1	11	83	56	56	0	0	0	0
3	2	4	11	83	56	56	0	0	0	0

Membro	AML ₁	AML ₂	AML ₃	AML ₄	AML ₅	AML ₆	AML ₇	AML ₈	AML ₉	AML ₁₀	AML ₁₁	AML ₁₂
1	0	0	-2	0	120	0	0	0	-2	0	-120	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Solução obtida

Nós, deslocamentos e reações:

Nó	Translação x	Translação y	Translação z	Rotação x	Rotação y	Rotação z
1	-0,1528	0,0002436	0,6263	0,007536	-0,005463	0,002673
2	-0,1542	0,4562	0,6139	0,003584	0,005748	-0,002701
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0

Nó	Ação x	Ação y	Ação z	Momento x	Momento y	Momento z
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	-0,08864	-0,6698	-2,032	-227,4	45,34	-32,11
4	-1,911	1,67	-1,968	-55,22	-44,54	30,99

Membros e ações nos membros:

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6	AM7	AM8	AM9	AM10	AM11	AM12
1	1,91	-0,67	-2,03	16,4	45,34	-42,75	-1,91	0,67	-1,97	-16,4	-37,71	-118,0
2	-0,67	0,09	-2,03	45,34	227,41	-32,11	0,67	-0,09	2,03	-45,34	16,4	42,75
3	3,2	0,22	0,04	-13,46	36,67	-13,01	-3,2	-0,22	-0,04	13,46	-45,03	58,84

7 CONCLUSÃO

Como solução para os problemas expostos na Seção 2.3 relacionados à falta de uma ferramenta acessível, que possa ser utilizada no ensino e aprendizagem de cálculo estrutural com ênfase especificamente em análise estrutural, além de projetos práticos, foi desenvolvido, neste trabalho, um sistema computacional que atenda estes requisitos, de forma eficaz, contribuindo de maneira significativa no meio acadêmico.

As justificativas para concluir sobre eficácia e contribuição significativa são apresentadas nos parágrafos que seguem.

O sistema computacional desenvolvido neste trabalho gerou resultados corretos através da utilização do método da Rigidez na área de Análise Matricial Estrutural. Os dados utilizados para testes foram retirados do livro Análise de Estruturas Reticuladas de Gere e Weaver (1987), uma obra conceituada mundialmente que serve de referência na área.

Além de resultados corretos e precisos, o sistema computacional conta com uma interface de fácil compreensão além de uma seção de ajuda completa, o que facilita sua utilização pelo usuário, podendo ser utilizado como ferramenta didática em cursos de engenharia, para verificação do aprendizado e ser utilizado por profissionais para solução de problemas práticos, conforme apresentado no Capítulo 6.

Neste trabalho foram desenvolvidos programas para análise matricial de estruturas, para seis tipos de estruturas, com entrada de dados projetada para utilização para ensino, onde os dados devem ser previamente preparados. Além disto, foi desenvolvido um módulo para entrada de dados profissional, para o caso da viga contínua. Para trabalhos futuros, é possível a inclusão de uma nova entrada de dados, relacionada diretamente a projetos práticos, para as demais estruturas (treliça plana, pórtico plano, grelha, treliça espacial e pórtico espacial) com a finalidade de se obter gráficos nos relatórios correspondentes.

Portanto, o desenvolvimento deste trabalho proporcionou ao autor, o estudo de no-

vas áreas e ferramentas dentre elas: Análise Estrutural, métodos de Análise Estrutural de forma matricial, Delphi, QuickReport, arquivos Help em HTML, entre outras, contribuindo de forma significativa para sua formação.

REFERÊNCIAS

ABENGE. **Currículos de Engenharia Civil**. Disponível em: <<http://abenge.org.br>>. Acesso em: 20 jul. 2016.

ARAGÃO FILHO, L. A. C. M. **Conceitos Elementares da Análise Matricial de Estruturas**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2010. 15 slides: color. Slides gerados a partir do software Power Point.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6.118**: Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

GERE, J. M.; WEAVER, W. Jr. **Análise de Estruturas Reticuladas**. Tradução: Carlos M. P. Ferreira Pinto. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1987. 443p.

MARTIN, H. C. **Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis**. New York-NY: McGraw-Hill, 1966. 331p.

McGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix Structural Analysis**. 2nd ed. New York-NY: John Wiley and Sons, Inc., 2000. 460p.

MICROSOFT. **HTML Help Workshop**. Developer Reference. Redmond-WA: Microsoft Press, 2012.

MUSEU DE ARTE DE SÃO PAULO. **Sobre o MASP**. Disponível em: <<http://masp.art.br>>. Acesso em: 20 dez. 2016.

NAKAMURA, J. **Estabilidade dimensional e resistência mecânica determinaram a madeira laminada colada na reforma da Biblioteca Paulo Freire, em Itaipu**. São Paulo: Revista Técnica, Editora Pini. v.208, 2014.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de aço** - dimensionamento prático de acordo com a NBR 8800: 2008, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2009. 627p.

PORTO, S. **Treliças metálicas e amplos painéis de vidro na fachada**. São Paulo: Revista Finestra, Editora Arco. v. 97, 2016.

QBS. **QuickReport User Manual**. Wembley: QBS Software Limited, 2008.

SACOMAN, M. A. R. **Otimização de Projetos**. Energia na Agricultura (UNESP. Botucatu. Impresso), Botucatu-SP, v. 13, n.3, p. 66-76, 1998.

SACOMAN, M. A. R. **Análise Matricial de Estruturas**. Relatório Técnico, Bauru: Unesp, 2012. 14p.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas: Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005. 346p.

SORIANO, H. L. **Estática das Estruturas**. 2.ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2010.

VENANCIO FILHO, F. **Análise Matricial de Estruturas: estática, estabilidade, dinâmica**. Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1975.

WIKIPEDIA. **Microsoft Windows**: Comparação entre versões. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Microsoft_Windows>. Acesso em: 20 dez. 2016.

BIBLIOGRAFIA

ASSAN, A. E. **Métodos Energéticos e Análise Estrutural**. Campinas-SP: Ed. Unicamp, 1996. 124p.

BHAVIKATTI, S. S. **Matrix Methods of Structural Analysis**. New Delhi: I K International Publishing House, 2014. 184p.

BOTT, E. **Introducing Windows 10 for IT Professionals, Technical Overview**. Redmond: Microsoft Press, 2016, 202p.

CANTÙ, M. **Delphi 2010 Handbook**. Piacenza: Create Space, 2010. 318p.

CANTÙ, M. **Object Pascal Handbook**. Piacenza: Create Space, 2015. 552p.

HODGES, N. **Coding in Delphi**. Gilbertsville-PA: Nepeta Enterprises, 2012. 242 p.

MOREIRA, D. F. **Análise Matricial das Estruturas**. São Paulo: Ed. Universidade de São Paulo-SP, 1977. 390p.

PETZOLD, C. **Programming Windows**. 6th ed. Developer Reference Series. Redmond-WA: Microsoft Press, 2013. 1136 p.

SACOMAN, M. A. R. **Otimização de Projetos utilizando GRG, Solver e Excel**. In: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - Cobenge, 2012, Belém. XL COBENGE. Belém: 2012. v. 1.V.

SISTEMAS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS

Sistemas Operacionais: Windows XP, Windows 7 e Windows 10
<http://www.microsoft.com>

Ambientes de Desenvolvimento Integrado: Delphi 7 e Delphi XE10
<http://www.embarcadero.com>

Sistemas Gráficos para Elaboração de Figuras: CorelDRAW Graphics Suite X8
<http://www.corel.com>

Sistemas para Criação de Arquivos de Ajuda e Arquivos Tutoriais: HTML Help WorkShop
<http://www.microsoft.com>

Componentes para Criação de Relatórios: Quickreport
<http://www.quickreport.co.uk>

Sistemas para Criação de Vídeo: VirtualDub
<http://virtualdub.org>

Componentes para Apresentação de Vídeos: marsMediaPlayer
<http://sacoman.dco.fc.unesp.br>

APÊNDICE A - Ações de engastamento perfeito produzidas por cargas

	$M_A = \frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(3a+b)$ $R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b)$
	$M_A = \frac{Pa}{L}(L-a)$ $M_B = -\frac{Pa}{L}(L-a)$ $R_A = P$ $R_B = P$
	$M_A = \frac{wL^2}{12}$ $M_B = -\frac{wL^2}{12}$ $R_A = \frac{wL}{2}$ $R_B = \frac{wL}{2}$
	$M_A = \frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2)$ $M_B = -\frac{wa^2}{12L^3}(4L - 3a)$ $R_A = \frac{wa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3)$ $R_B = \frac{wa^3}{2L^3}(2L - a)$
	$M_A = \frac{wL^2}{30}$ $M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $R_A = \frac{3wL}{20}$ $R_B = \frac{7wL}{20}$
	$M_A = \frac{Mb}{L^2}(2a-b)$ $M_B = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$ $R_A = \frac{6Mab}{L^3}$ $R_B = -\frac{6Mab}{L^3}$
	$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$
	$T_A = \frac{Tb}{L}$ $T_B = \frac{Ta}{L}$

APÊNDICE B - Propriedades de seções usuais

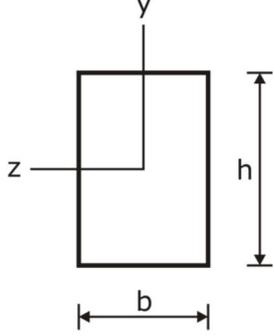
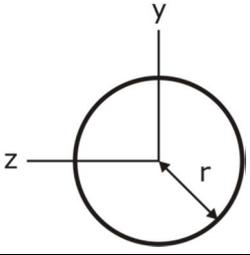
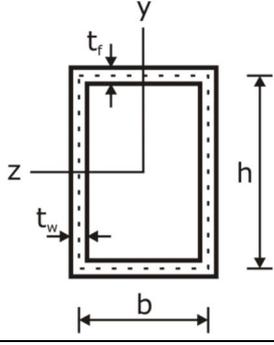
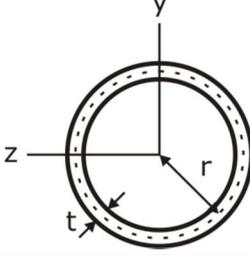
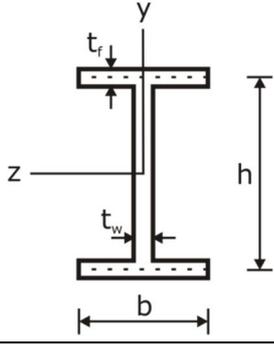
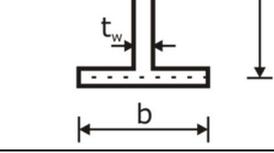
I_Z = momento de inércia da seção transversal relativa ao eixo z

I_Y = momento de inércia da seção transversal relativa ao eixo y

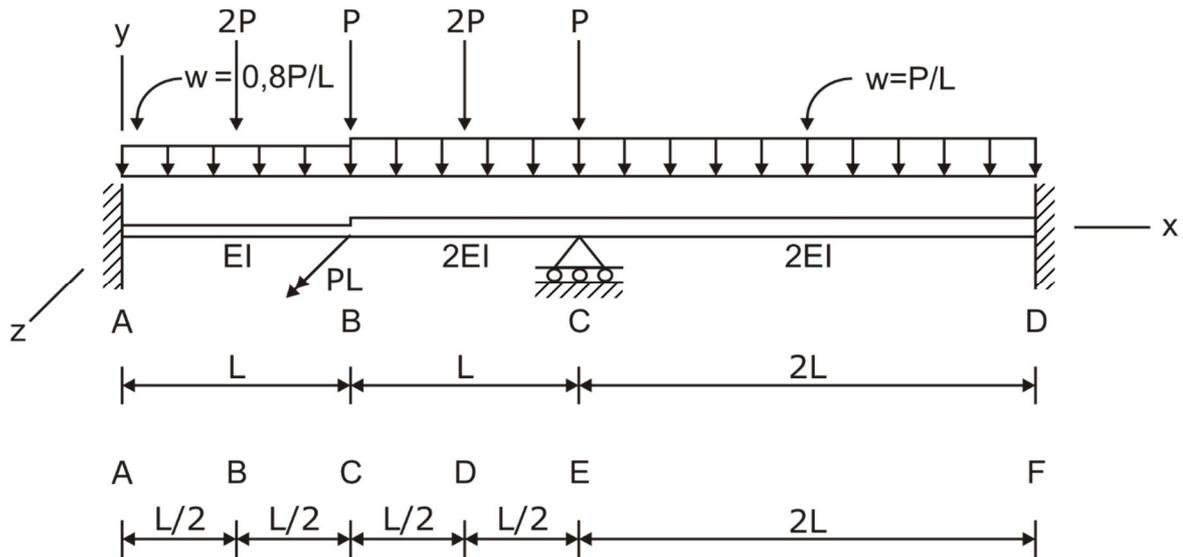
A = área da seção transversal

J = constante de torção

f = fator de forma para cortante

	$I_Z = \frac{bh^3}{12}$	$I_Y = \frac{hb^3}{12}$	$f = \frac{6}{5}$
	$I_Z = I_Y = \frac{\pi r^4}{4}$	$J = \frac{\pi r^4}{2}$	$f = \frac{10}{9}$
	$I_Z \approx \frac{h^2}{6}(ht_w + 3bt_f)$	$I_Y \approx \frac{b^2}{6}(bt_f + 3ht_w)$	$f = \frac{A}{2ht_w}$
	$I_Z = I_Y = \frac{\pi r^3 t}{2}$	$J \approx 2\pi r^3 t$	$f = 2$
	$A \approx ht_w + 2bt_f$	$J \approx \frac{1}{3}(ht_w^3 + 2bt_f^3)$	$f = \frac{A}{ht_w}$
	$I_Z \approx \frac{h^2}{12}(ht_w + 6bt_f)$	$I_Y \approx \frac{b^3 t_f}{6}$	

APÊNDICE C - Exemplo de análise de viga contínua



$E=10000$, $b=12$ cm, $h_{AB}=20$ cm, $h_{BD}=25,2$ cm, $w_{AB}=0,6$ kg/cm, $w_{BD}=0,756$ kg/cm, $P=60$ kg.

Caso A - Entrada de dados manual para efeito de aprendizagem

Devem ser informados o módulo de elasticidade (E), a quantidade de nós (A, B, C, D), as vinculações dos nós (R_x, R_y), os carregamentos aplicados nos nós (P, M) e, para cada tramo (AB, BC e CD), devem ser calculados os momentos de inércia (I_z) e as ações de engastamento perfeito ($AML_1, AML_2, AML_3, AML_4$). Os diagramas V e M não são oferecidos pelo programa.

Caso B - Entrada de dados automatizada para efeito de projeto profissional

Devem ser informados o módulo de elasticidade (E), a quantidade de nós (A, B, C, D, E, F), as vinculações dos nós (R_x, R_y), os carregamentos aplicados nos nós (P, M) e, para cada tramo (AB, BC, CD, DE e EF), b, h e carregamentos. Os diagramas V e M são oferecidos pelo programa.

As entradas de dados são apresentadas a seguir.

Caso A											
Nó	R_x	R_y	P	M	Membro	L	I_z	AML_1	AML_2	AML_3	AML_4
1	1	1			1	100	8000	90,0	2000	90,0	-2000
2	0	0	-60	6000	2	100	16003,008	97,9	2130	97,8	-2130
3	1	0	-60		3	200	16003,008	75,6	2520	75,6	-2520
4	1	1			Vários cálculos requeridos do aprendiz.						

Caso B										
Nó	R_x	R_y	P	M	Membro	L	b	h	w_e	w_d
1	1	1			1	50	12	20,0	0,600	0,600
2	0	0	-120		2	50	12	20,0	0,600	0,600
3	0	0	-60	6000	3	50	12	25,2	0,756	0,756
4	0	0	-120		4	50	12	25,2	0,756	0,756
5	1	0	-60		5	200	12	25,2	0,756	0,756
6	1	1			Nenhum cálculo requerido do profissional.					

As soluções são apresentadas a seguir.

Caso A - Solução a partir da entrada de dados manual

Nó, Deslocamentos e Reações

Nó	Deslocamento Y	Deslocamento Z	Reação Y	Reação Z
1	0	0	265,497	10009,8
2	-0,134994	0,000956317	0	0
3	0	0,000990549	329,48	0
4	0	0	51,8224	-934,823

Membro e Ações nos Membros

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	265,49729	10009,811	-85,497291	7539,9178
2	25,497291	-1539,9178	170,10271	-5690,3531
3	99,377648	5690,3531	51,822352	-934,82343

Caso B - Solução a partir da entrada de dados automatizada

Nó, Deslocamentos e Reações

Nó	Deslocamento Y	Deslocamento Z	Reação Y	Reação Z
1	0	0	265,497	10009,8
2	-0,0892165	-0,00226399	0	0
3	-0,134994	0,000956316	0	0
4	-0,0730606	0,00153819	0	0
5	0	0,000990549	329,48	0
6	0	0	51,8224	-934,824

Membro e Ações nos Membros

Membro	AM1	AM2	AM3	AM4
1	265,49729	10009,811	-235,49729	2515,0532
2	115,49729	-2515,0532	-85,497293	7539,9178
3	25,497293	-1539,9178	12,302707	1869,7825
4	-132,30271	-1869,7825	170,10271	-5690,3529
5	99,377647	5690,3529	51,822353	-934,82355

Comparação entre os casos A e B

Os nós, deslocamentos e reações apresentadas no caso A tem seus correspondentes no caso B sendo que no caso B, existem nós intermediários que enriquecem as informações da solução.

Os membros e suas ações não tem correspondência direta entre os casos A e B. No caso B, com nós intermediários, há mais membros. Notam-se então, que as ações à esquerda e à direita em membros consecutivos do caso B, são as mesmas, dos membros do caso A, considerando-se seus extremos em nós de mesma posição no eixo longitudinal. Em resumo, as ações dos membros AB, BC e CD do caso A tem seus correspondentes nos extremos dos membros ABC, CDE e EF do caso B.

Desta forma, os dois casos oferecem a mesma solução, sendo o primeiro adequado ao ensino, onde o usuário deve entrar com dados já manipulados e recebe resposta com informações que devem ser interpretadas e o segundo, permite entrada de dados brutos e oferece resposta mais detalhada.

Seguem informações gráficas do esquema da viga, com seus carregamentos, reações de apoio calculadas nos dois casos, valores dos esforços cortantes e momentos fletores calculados nos dois casos. Além disto, os relatórios dos dois casos apresentam os deslocamentos que ocorrem nos nós.

